

Mathematik für Biologen und Biotechnologen

Vorlesungskript aus dem Sommersemester 2019
Basierend auf Skripten von Dr. Matthieu Felsinger, Prof. Dr. Moritz Kaßmann und Dr.
Jamil Chaker

Tim Schulze

Inhaltsverzeichnis

1	Grundbegriffe	4
1.1	Mengen	4
1.2	Zahlenbereiche und Intervalle	5
1.3	Operationen mit Mengen	6
1.4	Aussagenlogik	6
1.5	Der Absolutbetrag	8
1.6	Abbildungen	9
2	Elementare Funktionen	12
2.1	Lineare Funktionen	12
2.2	Quadratische Funktionen	14
2.3	Umkehrfunktionen & Lösen von Gleichungen	16
2.4	Potenzfunktionen	18
2.5	Allgemeine Exponential- & Logarithmusfunktionen	19
2.6	Die natürliche Exponentialfunktion und der natürliche Logarithmus	21
2.6.1	Exponentielles Wachstum & Exponentieller Zerfall	22
2.6.2	Beschränktes Wachstum & Beschränkter Zerfall	24
2.6.3	Logistisches Wachstum	25
2.6.4	Logarithmische Darstellung	26
2.7	Trigonometrische Funktionen	31
2.7.1	Die Funktionen \sin , \cos und \tan	31
2.7.2	Modifizierte Sinus- bzw. Kosinusfunktionen	33
2.7.3	Die Umkehrfunktionen von \sin , \cos und \tan	35
3	Differentialrechnung	37
3.1	Reelle Zahlenfolgen	37
3.1.1	Spezialfall: Die geometrische Folge	39
3.1.2	Das Summenzeichen und Reihen	40
3.1.3	Spezialfall: Die geometrische Reihe	40
3.2	Differenzierbarkeit & Ableitung	41
3.2.1	Der Differentialquotient	42
3.2.2	Differentiationsregeln	44
3.3	Extremwertprobleme	46
3.3.1	Monotonie von Funktionen	46
3.3.2	Maxima und Minima	47
3.3.3	Hilfsmittel zur Bestimmung von Grenzwerten: Die Regel von l'Hospital	51
4	Integralrechnung	53
4.1	Einführung und Motivation	53
4.2	Definition des Integrals	54
4.2.1	Approximation durch Ober- und Untersumme	54

4.2.2	Erste Eigenschaften	57
4.3	Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	57
4.4	Techniken zum Auffinden von Stammfunktionen	59
4.4.1	Partielle Integration	60
4.4.2	Substitutionsregel	61
4.5	Uneigentliche Integrale	62
4.5.1	Unbeschränktes Integrationsintervall	62
4.5.2	Definitionslücken des Integranden	63
4.6	Anwendung: Wahrscheinlichkeit, Dichtefunktion und Erwartungswert	64
5	Matrizen & lineare Gleichungssysteme	66
5.1	Rechnen mit Matrizen und Vektoren	66
5.2	Lineare Gleichungssysteme	69
5.2.1	Lineare Gleichungssysteme in Zeilenstufenform	70
5.2.2	Das Gaußsche Eliminationsverfahren	71
5.3	Die Determinante	73
5.4	Die inverse Matrix	76
5.5	Lineare Entwicklungsmodelle in diskreter Zeit	77
5.5.1	Übergangsmatrizen	77
5.5.2	Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen	78
6	Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung	81
6.1	Trennung der Veränderlichen	83
6.2	Lineare Entwicklungsmodelle in stetiger Zeit	86
6.3	Das Lotka-Volterra'sche Räuber-Beute-Modell	88
	Literaturverzeichnis	93

1 Grundbegriffe

In diesem Kapitel werden grundlegende Begriffe und Definitionen eingeführt, um mathematische Sachverhalte möglichst präzise ausdrücken zu können.

1.1 Mengen

Eine formale Definition des Mengenbegriffs würde den Rahmen dieser Vorlesung deutlich sprengen; stattdessen schließen wir uns GEORG CANTORS¹ Auffassung einer Menge an:

„Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“

Die einfachste Möglichkeit eine Menge anzugeben ist die Aufzählung sämtlicher Elemente. Hierbei werden geschweifte Klammern zur Begrenzung einer Menge verwendet. So ist beispielsweise

$$\begin{array}{ll} A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} & \text{eine Menge von Zahlen,} \\ B = \{\text{Eiche, Birke, Tanne, Kiefer, Ahorn}\} & \text{eine Menge von Bäumen.} \end{array}$$

Wollen wir nur diejenigen Elemente einer Menge auswählen, die eine Bedingung erfüllen, so bieten sich folgende Schreibweisen an:

$$\begin{aligned} G &= \{a \in A \mid a \text{ ist eine gerade Zahl}\} = \{a \in A : b \text{ ist eine gerade Zahl}\} = \{2, 4, 6, 8, 10\}, \\ L &= \{b \in B \mid b \text{ ist Laubbaum}\} = \{b \in B : b \text{ ist Laubbaum}\} = \{\text{Eiche, Birke, Ahorn}\}. \end{aligned}$$

Oft ist eine Auflistung sämtlicher Elemente nicht möglich, etwa weil eine Liste zu umfangreich oder gar unendlich ist. Wenn keine Missverständnisse auftreten können, so ist eine Schreibweise mit Pünktchen möglich, z.B.

$$\begin{aligned} O &= \text{Menge aller Obstsorten} = \{\text{Apfel, Birne, Weintraube, \dots}\}, \\ U &= \text{Menge aller positiven ungeraden Zahlen} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}. \end{aligned}$$

Element einer Menge zu sein, wird mit dem Zeichen “ \in ” ausgedrückt. Nicht Element einer Menge zu sein, wird mit dem Zeichen “ \notin ” ausgedrückt. Es gilt

$$\begin{array}{ll} \text{Orange} \in O, & \text{Champignon} \notin O, \\ 5 \in U, & 22 \notin U. \end{array}$$

Eine Menge A heißt *Teilmenge* einer Menge B – in Zeichen $A \subset B$ – falls jedes Element aus A auch Element in B ist. Z.B. ist die Menge aller Säugetiere eine Teilmenge der

¹siehe: [Can97], dt. Mathematiker (1845-1918), gilt insbesondere als Begründer der Mengenlehre

Menge aller Wirbeltiere. Mit dem Symbol “ \emptyset ” wird die leere Menge bezeichnet. Sie ist die einzige Menge, die kein Element enthält. Diese Menge kommt sehr häufig vor, z.B. gilt

$$\{b \in B \mid b \text{ ist keine Pflanze}\} = \emptyset = \{u \in U \mid u \text{ ist eine negative Zahl}\}.$$

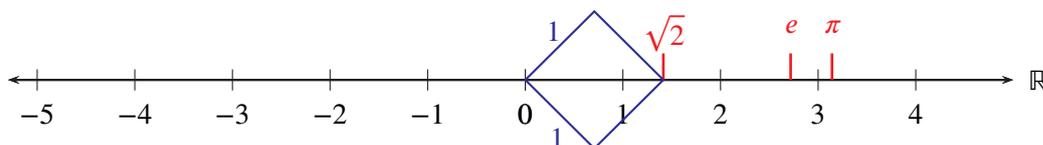
1.2 Zahlenbereiche und Intervalle

In naturwissenschaftlichen Anwendungen treten verschiedene Mengen an Zahlen auf, etwa als Ergebnis von Messungen, z.B. die Anzahl an Bakterien in einer Kultur (\mathbb{N}), die Konzentration einer Kochsalzlösung (\mathbb{Q}) oder der Winkel zwischen Blättern einer Pflanze (\mathbb{R})².

In der Mathematik haben sich folgende Schreibweisen für häufig auftretende Mengen von Zahlen eingebürgert:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, 4, \dots\} && = \text{Menge der natürlichen Zahlen,} \\ \mathbb{Z} &= \{0, -1, 1, -2, 2, \dots\} && = \text{Menge der ganzen Zahlen,} \\ \mathbb{Q} &= \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\} && = \text{Menge der rationalen Zahlen,} \\ \mathbb{R} &= \text{Menge der reellen Zahlen.} \end{aligned}$$

Die reellen Zahlen lassen sich nicht wie die übrigen Zahlbereiche auflisten. Man kann sich \mathbb{R} vorstellen als Menge aller Punkte auf der Zahlengeraden:



Man kann elementar beweisen, dass $\sqrt{2}$ eine reelle Zahl, jedoch keine rationale Zahl ist.

Es gilt

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

und keine dieser Mengen stimmen überein.

Häufig werden wir nur spezielle Teilmengen der Zahlengerade – sogenannte *Intervalle* – betrachten:

Definition 1.1 (Intervalle). Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Definiere

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \text{ und } x \leq b\}, & (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \text{ und } x < b\}, \\ [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \text{ und } x < b\}, & (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \text{ und } x \leq b\}, \end{aligned}$$

sowie die unbeschränkten Intervalle

$$\begin{aligned} [a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}, & (-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}, \\ (a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, & (-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}. \end{aligned}$$

²Siehe Abschnitt 1.2.4 in [ESS14]

Wir nennen Intervalle der Form $[a, b]$ abgeschlossen und Intervalle der Form (a, b) offen. Des Weiteren bezeichnen wir Intervalle des Typs $(a, b]$ als linksoffen und Intervalle des Typs $[a, b)$ als rechtsoffen.

Bemerkung 1.2. Zur Veranschaulichung unterscheiden wir drei Fälle für $a, b \in \mathbb{R}$.

Fall 1: Falls $a < b$, so sind Intervalle Abschnitte der Zahlengerade, welche durch a und b begrenzt werden. Die eckige Klammer symbolisiert, dass das jeweilige Ende Teil des Abschnitts ist, d.h. $a \in [a, b)$, $b \in (a, b]$ und $a, b \in [a, b]$. Die runde Klammer hingegen bedeutet, dass das jeweilige Ende nicht Teil des Abschnitts ist. Es gilt

$$(a, b) \subset [a, b) \subset [a, b] \quad \text{und} \quad (a, b) \subset (a, b] \subset [a, b].$$

Fall 2: Falls $a = b$, so gilt $[a, b] = [a, a] = \{a\}$ und $(a, b) = (a, a) = [a, b) = [a, a) = (a, b] = (a, a] = \emptyset$.

Fall 3: Falls $a > b$, so gilt $(a, b) = [a, b) = (a, b] = [a, b] = \emptyset$.

1.3 Operationen mit Mengen

Definition 1.3. A, B seien zwei Mengen. Dann definieren wir

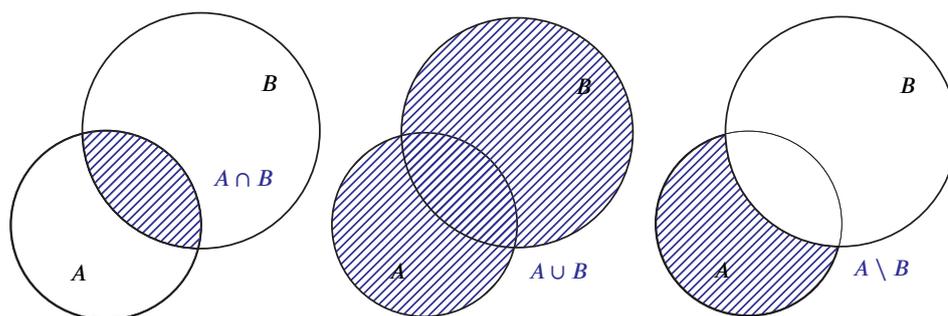
$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$	genannt <i>Durchschnitt</i> von A und B ,
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$	genannt <i>Vereinigung</i> von A und B ,
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$	genannt <i>Differenz</i> von A und B ,
$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ und } y \in B\}$	genannt <i>Produktmenge</i> von A und B .

Bemerkung.

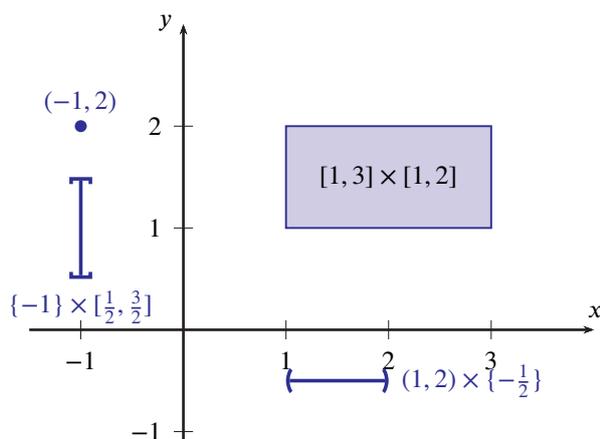
- „oder“ im mathematischen Sinne ist kein exklusives „oder“; es können auch beide Eigenschaften gleichzeitig gelten. Präziser: Es gilt stets $(A \cap B) \subset (A \cup B)$.
- In der Menge $A \times B$ bezeichnet (x, y) das geordnete Paar der Elemente $x \in A$ und $y \in B$.
- Wir verwenden die Notation $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ und definieren induktiv den Koordinatenraum der d -Tupel durch $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ für $d \geq 2$.
- Zwei Mengen A, B werden als disjunkt bezeichnet, falls sie keine gemeinsamen Elemente haben, d.h. $A \cap B = \emptyset$.

1.4 Aussagenlogik

Eine Aussage ist ein sprachliches Gebilde (ein Satz), dem in eindeutiger Weise genau einer der beiden Wahrheitswerte „wahr“ und „falsch“ zugeordnet werden kann, eine Aussage ist entweder *wahr* oder *falsch*. Es werde ein Tier betrachtet. Beispiele für Aussagen sind



Grafik 1.1: Veranschaulichung der Mengenoperationen Durchschnitt, Vereinigung, Differenz

Grafik 1.2: Wir werden sehr häufig der Zahlenebene $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ begegnen. Teilmengen von \mathbb{R}^2 sind dann anschaulich Teilflächen der Ebene und geordnete Paare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sind Punkte in der Ebene.

dann:

- F = Das Tier ist ein Fisch,
- S = Das Tier ist kein Säugetier,
- W = Das Tier lebt ausschließlich im Wasser.

Wenn A und B irgendwelche Aussagen sind, dann bedeutet der *Implikationspfeil*

$$A \Rightarrow B,$$

dass B dann wahr ist, wenn A wahr ist. Man nennt B dann *notwendig für A* oder *hinreichend für B* .Mit den obigen Aussagen gilt etwa $F \Rightarrow W$ und auch $F \Rightarrow S$. Es gilt jedoch **weder** $W \Rightarrow S$ **noch** $S \Rightarrow W$.

Allgemein bedeutet der Äquivalenzpfeil

$$A \Leftrightarrow B,$$

dass die Aussage A genau dann wahr ist, wenn die Aussage B wahr ist; man nennt A und B auch äquivalent. Z.B. gilt für jede Zahl $x \in \mathbb{R}$

$$x > 5 \Leftrightarrow -x < -5.$$

Vorsicht: Den Äquivalenzpfeil nicht missbrauchen! Z.B. ist die folgende Aussage offensichtlich **falsch**: $F \Leftrightarrow W$. Insbesondere gilt diese Warnung für mathematische Aussagen: $x > 3 \Leftrightarrow x^2 > 9$ ist **falsch**!

1.5 Der Absolutbetrag

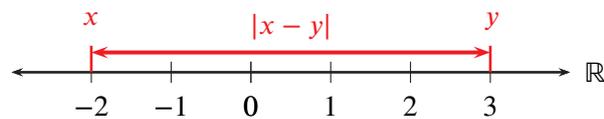
Der Absolutbetrag $|x|$ einer reellen Zahl x ist definiert durch

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0, \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

$|x - y|$ ist der Abstand zwischen den Punkten $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ auf der Zahlengeraden.

Beispiel 1.4.

- (i) $x = -2$, $y = 3$. $|x - y| = |-2 - 3| = |-5| = -(-5) = 5$.



- (ii) Wie schreibt man die Menge

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < \frac{1}{3} \right\}$$

als Intervall?

Lösung: Wir schreiben die Bedingung $|x - 2| < \frac{1}{3}$ mithilfe der Definition des Absolutbetrags um.

Fall 1: $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Dann gilt

$$\frac{1}{3} > |x - 2| = x - 2 \Leftrightarrow \frac{7}{3} > x.$$

Der erste Fall liefert also die Bedingung $2 \leq x < \frac{7}{3}$, d.h. $x \in [2, \frac{7}{3})$

Fall 2: $x - 2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$. Dann gilt

$$\frac{1}{3} > |x - 2| = 2 - x \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}.$$

Der zweite Fall liefert also die Bedingung $\frac{5}{3} < x < 2$, d.h. $x \in (\frac{5}{3}, 2)$.

Die Kombination beider Fälle liefert daher

$$x \in \left(\frac{5}{3}, 2\right) \text{ oder } x \in \left[2, \frac{7}{3}\right) \Leftrightarrow x \in \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right),$$

d.h.

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x - 2| < \frac{1}{3} \right\} = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right).$$



1.6 Abbildungen

Definition 1.5. Eine *Abbildung* f von einer Menge D in eine Menge M ordnet jedem Element $x \in D$ – genannt *Urbild* – genau ein Element $f(x) \in M$ zu – genannt *Bild* von x .

Wir schreiben dafür kurz $f: D \rightarrow M$ gefolgt von der Zuordnungsvorschrift. Die Menge D heißt *Definitionsbereich* von f und M heißt *Wertevorrat* von f .

Bemerkung. Eine Abbildung ist durch **drei** Angaben festgelegt: Definitionsbereich, Wertevorrat und Zuordnungsvorschrift. Letztere wird oft auch *Funktionsterm* genannt. Wir werden zukünftig oft Eigenschaften wie Injektivität, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit etc. von Abbildungen untersuchen. Es ist dabei dringend erforderlich, Abbildungen vollständig – d.h. mit **allen drei** Angaben – festzulegen.

Beispiel 1. (Der genetische Code^a) Von 64 Nukleotid-Tripeln – bezeichnet als *Kodons* – kodieren 61 für 20 verschiedene Aminosäuren. Hierdurch wird eine Abbildung G von der Menge der Kodons K in die Menge der Aminosäuren A erklärt, in Zeichen

$$G: K \rightarrow A.$$

^aBeispiel 1.8.1 [Ste04]

Die Liste der Aminosäuren – also eine Auflistung der Menge A – sowie die Zuordnungsvorschrift von $G: K \rightarrow A$ findet sich in [Grafik 1.3](#).³

Aminosäure (engl.)	Code 1	Code 2	2nd				3rd								
			U	C	A	G									
alanine	Ala	A	1st	U	Phe	Ser	Tyr	Cys	U						
arginine	Arg	R								C	Leu	Ser	TC	TC	A
aspartic acid	Asp	D													
asparagine	Asn	N	U	Leu	Pro	His	Arg	U							
cysteine	Cys	C							C	Leu	Pro	His	Arg	C	
glutamic acid	Glu	E	A	Leu	Pro	Gln	Arg	A							
glutamine	Gln	Q							G	Leu	Pro	Gln	Arg	G	
glycine	Gly	G	U	Ile	Thr	Asn	Ser	U							
histidine	His	H							C	Ile	Thr	Asn	Ser	C	
isoleucine	Ile	I	A	Met	Thr	Lys	Arg	A							
leucine	Leu	L							G	Val	Ala	Asp	Gly	U	
lysine	Lys	K	U	Val	Ala	Asp	Gly	C							
methionine	Met	M							C	Val	Ala	Asp	Gly	C	
phenylalanine	Phe	F	A	Val	Ala	Glu	Gly	A							
proline	Pro	P							G	Val	Ala	Glu	Gly	A	
serine	Ser	S	G	Val	Ala	Glu	Gly	G							
threonine	Thr	T							U	Val	Ala	Glu	Gly	G	
tryptophan	Trp	W	C	Val	Ala	Glu	Gly	G							
tyrosine	Tyr	Y							A	Val	Ala	Glu	Gly	A	
valine	Val	V	G	Val	Ala	Glu	Gly	G							

Grafik 1.3: Die Liste der Aminosäuren (links) und die Zuordnungsvorschrift der Abbildung $G: K \rightarrow A$ in Form einer Tabelle (rechts).

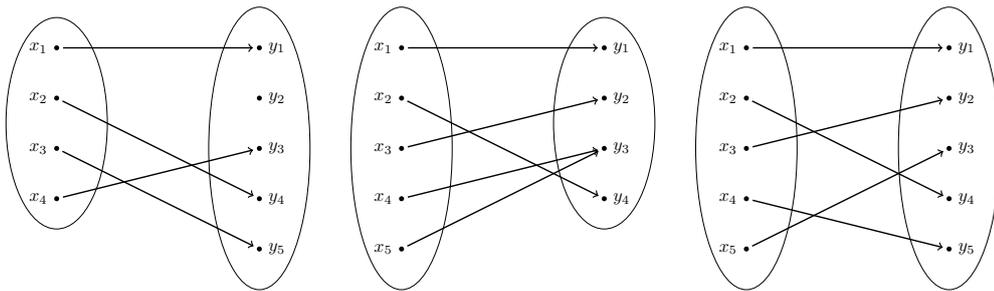
³Seite 42f. in [Ste04]

Definition 1.6 (Injektivität, Surjektivität, Bijektivität).

- (i) Eine Abbildung $f: D \rightarrow M$ heißt *injektiv*, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt: $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- (ii) Eine Abbildung $f: D \rightarrow M$ heißt *surjektiv*, falls es zu jedem $y \in M$ ein $x \in D$ gibt mit $y = f(x)$.
- (iii) Eine Abbildung $f: D \rightarrow M$ heißt *bijektiv*, wenn f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Bemerkung 1.7. Die Definitionen verdeutlichen die Wichtigkeit von Definitionsbereich und Wertevorrat einer Abbildung bezüglich ihrer Eigenschaften. Wir wollen kurz die oben definierten Begriffe kommentieren:

- Bei einer injektiven Abbildung $f: D \rightarrow W$ wird jedes Element $y \in W$ höchstens einmal (d.h. ein oder kein mal) als Funktionswert der Abbildung f angenommen. Es bilden also nie zwei verschiedene Elemente $x_1, x_2 \in D$ auf dasselbe Element des Wertevorrats ab.
- Bei einer surjektiven Abbildung $f: D \rightarrow W$ wird jedes Element $y \in W$ mindestens einmal als Funktionswert der Abbildung f angenommen. Zu jedem Element des Wertevorrats $y \in W$ gibt es also mindestens ein Element des Definitionsbereich $x \in D$, sodass y als Funktionswert von x realisiert wird.
- Bei einer bijektiven Abbildung $f: D \rightarrow W$ wird jedes Element $y \in W$ genau einmal als Funktionswert der Abbildung f angenommen. Somit gibt es zu jedem Element des Wertevorrats $y \in W$ genau ein Element des Definitionsbereich $x \in D$, sodass $y = f(x)$ gilt.



Grafik 1.4: Veranschaulichung einer injektiven (links), einer surjektiven (mitte) und einer bijektiven (rechts) Abbildung.

Die linke Abbildung in **Grafik 1.4** bildet die Menge $D = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ auf die Menge $W = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ ab. Hierbei handelt es sich um eine injektive Abbildung, da auf jedes Element aus W höchstens einmal abgebildet wird. Die Abbildung ist jedoch nicht surjektiv, da auf das Element y_2 nicht abgebildet wird.

Die mittlere Abbildung in **Grafik 1.4** bildet die Menge $D = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ auf die Menge $W = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ ab. Die Abbildung ist surjektiv, da auf jedes Element aus W mindestens einmal abgebildet wird. Sie ist jedoch nicht injektiv, da x_4 und x_5 auf das

Element y_3 abbilden.

Die rechte Abbildung in [Grafik 1.4](#) bildet die Menge $D = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ auf die Menge $W = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ ab. Die Abbildung ist bijektiv, da jedem Element aus W genau ein Element aus D zugeordnet ist.

Beispiel.

- (i) Die Abbildung $G: K \rightarrow A$ aus [Beispiel 1](#) ist surjektiv, jedoch nicht injektiv.
- (ii) Die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$, ist weder injektiv noch surjektiv.
- (iii) Die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), f(x) = x^2$, ist nicht injektiv aber surjektiv.
- (iv) Die Abbildung $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$, ist injektiv aber nicht surjektiv.

2 Elementare Funktionen

Wir werden uns für den Rest dieser Veranstaltung nur noch mit Abbildungen beschäftigen, deren Definitionsbereich und Wertevorrat Teilmengen der reellen Zahlen sind. Solche Abbildungen nennen wir *Funktionen*. Wir veranschaulichen Funktionen $f : D \rightarrow M$ mit $D, M \subset \mathbb{R}$, indem wir ihren Graphen zeichnen.

Definition 2.1. Sei $f : D \rightarrow M$ eine Abbildung. Der Funktionsgraph (oder einfach nur Graph) der Funktion f ist definiert durch

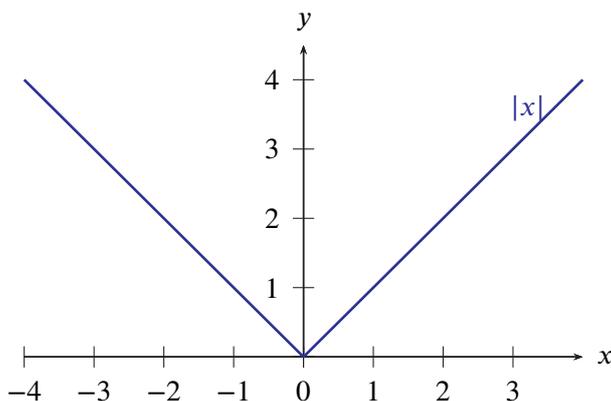
$$G_f = \{(x, f(x)) \in D \times M : x \in D\}.$$

Beispiel 2.2. Den Absolutbetrag definiert man als eine Funktion mit Definitionsbereich \mathbb{R} und Wertevorrat $[0, \infty)$:

$$|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad x \mapsto |x|$$

erklärt. Diese Funktion ist nicht injektiv, jedoch surjektiv, vgl. [Grafik 2.1](#).

Man könnte den Absolutbetrag auch als Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, definieren. Diese wäre **nicht** surjektiv. Dies unterstreicht noch einmal die Warnung im Anschluss an [Definition 1.5](#), dass zu einer Funktion auch stets die Angabe von Wertevorrat und Definitionsbereich gehören. ►



Grafik 2.1: Graph der Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$.

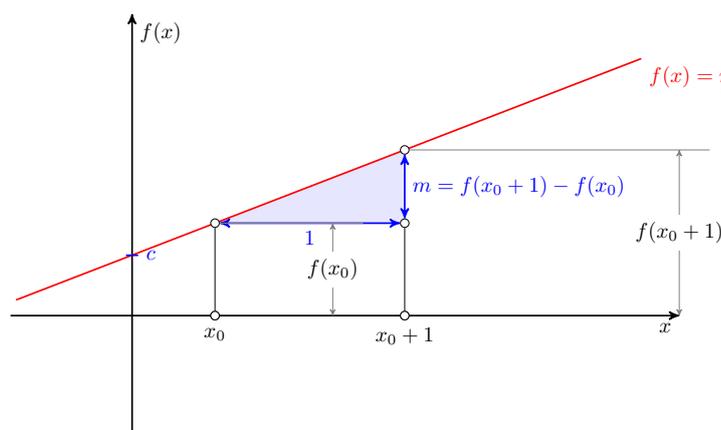
Wir widmen uns nun in den folgenden Abschnitten einigen prominenten Funktionen.

2.1 Lineare Funktionen

Lineare Funktionen $f : D \rightarrow M$ haben eine Zuordnungsvorschrift der Form

$$f(x) = mx + c, \quad \text{mit } m, c \in \mathbb{R}.$$

Im Fall $D = M = \mathbb{R}$ ist ihr Graph gegeben durch eine Gerade.



Grafik 2.2: Der Graph einer linearen Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. m heißt *Steigung* von f und c heißt *y-Achsenabschnitt* von f .

Bemerkung 2.3. Falls $m \neq 0$, so ist jede lineare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx + c$ **bijektiv**. (siehe Präsenzübungen)

Beispiel 2. (Photosynthetische Aktivität von *Typha latifolia* nach Batschelet^a)
McNaughton fand in [McN67] heraus, dass die photochemische Reaktion bei *Typha latifolia* (dickblättriger Rohrkolben) umso wirksamer ist, je höher der Ort über dem Meer liegt, an dem die jeweiligen Pflanzen wachsen. Die sogenannte Hill-Aktivität ist McNaughton zufolge eine lineare Funktion der frostfreien Periode des Ortes, an dem die Pflanze lebt^b.

Wir entnehmen dem Diagramm die beiden Datenpaare

$$x_1 = 100 \text{ Tage}, y_1 = 41 \text{ Hill-Einheiten}, \quad x_2 = 300 \text{ Tage}, y_2 = 21 \text{ Hill-Einheiten},$$

und wollen daraus die Geradengleichung bestimmen. Wir erhalten durch Einsetzen die beiden Gleichungen

$$f(x_1) = 100m + c = 41, \quad \text{und} \quad f(x_2) = 300m + c = 21.$$

Nach Subtraktion beider Gleichungen erhalten wir:

$$f(x_2) - f(x_1) = 200m = -20 \iff m = \frac{-1}{10}.$$

Durch Einsetzen ermitteln wir c : $f(100) = -10 + c = 41 \iff c = 51$. Die Geradengleichung lautet damit $f(x) = \frac{-1}{10}x + 51$. Die Hill-Aktivität nimmt also pro zusätzlichem frostfreien Tag um $\frac{1}{10}$ Hill-Einheiten ab.

^aBeispiel 3.6.2 in [Bat80]

^bDie Frage, ob gemessene Daten überhaupt einen linearen Zusammenhang bestätigen oder nicht, können wir momentan noch nicht beantworten (s. *Lineare Regression* in der Vorlesung Statistik.)

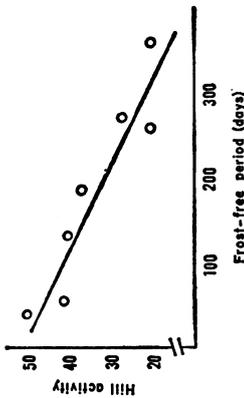


Fig. 1. Relation between Hill activity (micrograms of 2,6-dichlorophenol-indophenol per milligram of chlorophyll per minute) of isolated chloroplasts and the length of frost-free period (in days) at the site of origin of plants from which chloroplasts were isolated.

tail marshes at different altitudes suggest greater assimilation rates in populations from high altitudes (9). Although Hill activity cannot be equated with productivity, it seems likely that the greater assimilation rates of populations from sites with short growing seasons are at least partially a reflection of photochemical differences of the type documented here and represent a partial compensatory mechanism for the short period favorable for growth.

Preliminary experiments with four populations grown at 17-hour photoperiods with a 12-hour thermoperiod of 25° and 10°C gave an r of -0.952 ($.05 > P > .02$) for the regression of Hill activity on length of frost-free period at the native site.

S. J. MCNAUGHTON
Department of Bacteriology and Botany, Syracuse University, Syracuse, New York 13210

Grafik 2.3: Auszug aus dem Artikel [McN67], Beispiel 2

2.2 Quadratische Funktionen

Quadratische Funktionen $f: D \rightarrow M$ haben eine Zuordnungsvorschrift der Form

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \text{mit Parametern } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Der Graph einer quadratischen Funktion heißt *Parabel*, siehe [Grafik 2.4](#).

Die Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ bestimmen die Form des Funktionsgraphen wie folgt:

Zur Veranschaulichung betrachten wir zunächst $b, c = 0$, d.h. die quadratische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist von der Form $f(x) = ax^2$. Die Parabel zu einer solchen Funktion besitzt den Scheitelpunkt $S = (0, 0)$ und ist symmetrisch zur y -Achse. Im Spezialfall $a = 1$ wird der zugehörige Funktionsgraph **Normalparabel** genannt. Der Parameter $a \in \mathbb{R}$ gibt die Richtung der Öffnung der Parabel an. Des Weiteren lässt sich aus dem Wert a ablesen, ob die zugehörige Parabel aus einer Streckung oder Stauchung der Normalparabel der Normalparabel entsteht.

- $a > 0$: Die Parabel ist nach oben geöffnet
- $a < 0$: Die Parabel ist nach unten geöffnet
- $|a| < 1$: Die Parabel ist gestaucht.
- $|a| > 1$: Die Parabel ist gestreckt.

Der Parameter c gibt den Schnittpunkt der Parabel mit der y -Achse an, d.h. eine Veränderung des Wertes c bewirkt eine Verschiebung des Funktionsgraphen in Richtung der y -Achse.

Der Parameter b gibt an, ob und wie stark die Funktion im y -Achsenursprung wächst oder fällt¹.

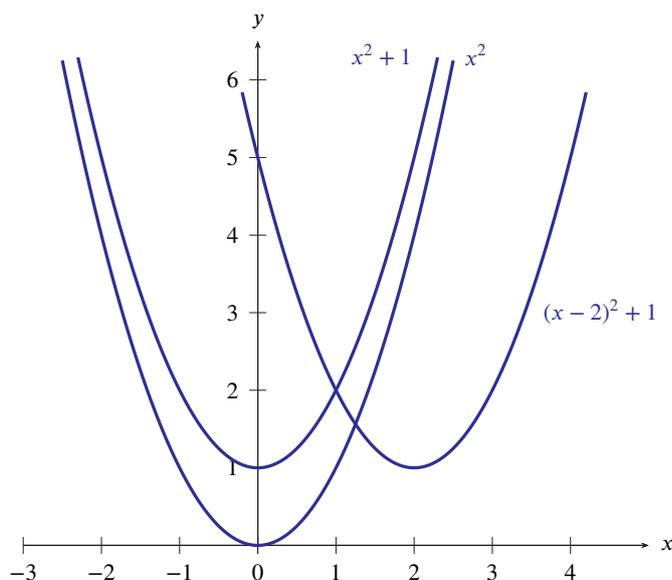
¹Das Wachstumsverhalten von Funktionen untersuchen wir im Abschnitt über Differentiation

Erinnerung: Die binomischen Formeln. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (2.1)$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (2.2)$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2. \quad (2.3)$$



Grafik 2.4: Graphen ausgewählter quadratischer Funktionen

Satz 2.4 (Lösen von quadratischen Gleichungen). Seien $p, q \in \mathbb{R}$. Die quadratische Gleichung

$$x^2 + px + q = 0 \quad (2.4)$$

besitzt

(i) im Fall $\frac{p^2}{4} - q > 0$ die beiden Lösungen $x_{1/2} = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

(ii) im Fall $\frac{p^2}{4} - q = 0$ die einzige Lösung $x = \frac{-p}{2}$.

(iii) im Fall $\frac{p^2}{4} - q < 0$ keine Lösung.

Beweis. Mit der binomischen Formel (2.1) gilt

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \\ &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Also gilt

$$x^2 + px + q = 0 \iff \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

Damit ergeben sich die Aussagen (ii) und (iii) sofort. Außerdem ergibt sich im Fall (i)

$$\begin{aligned} x^2 + px + q = 0 &\iff \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q \\ &\iff x + \frac{p}{2} = \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\ &\iff x = \frac{-p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung.

- Man sagt, dass der Ausdruck (2.5) in *Scheitelpunktform* ist; man kann daraus den Scheitelpunkt $S = \left(\frac{-p}{2}, q - \frac{p^2}{4}\right)$ der zugehörigen Parabel ablesen.
- Der Ausdruck $\frac{p^2}{4} - q$ wird *Diskriminante* von Gleichung (2.4) genannt. Sie erlaubt die Unterscheidung (lat. *discriminare*=unterscheiden), wie die Lösungsmenge der Gleichung beschaffen ist.
- Mit [Satz 2.4](#) lassen sich auch quadratische Gleichungen der Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, \quad (2.6)$$

lösen. Man verwendet die Äquivalenz

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

womit (2.6) in eine Gleichung der Form (2.4) gebracht wurde. Diese löst man dann mit Hilfe von [Satz 2.4](#) mit $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$.

Beispiel 2.5.

- Die Gleichung $x^2 + 2x - 1 = 0$ hat die beiden Lösungen $x_1 = -1 - \sqrt{2}$ und $x_2 = -1 + \sqrt{2}$.
- Die Gleichung $x^2 + 2x + 1 = 0$ hat die einzige Lösung $x = -1$.
- Die Gleichung $x^2 + 2x + 5 = 0$ besitzt keine Lösungen.



2.3 Umkehrfunktionen & Lösen von Gleichungen

Ist $f : D \rightarrow M$ eine bijektive Funktion, so existiert die Umkehrfunktion $f^{-1} : M \rightarrow D$. Das ist diejenige Funktion, welche

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{für alle } x \in D \quad \text{und} \quad (2.7)$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{für alle } y \in M \quad (2.8)$$

erfüllt.

Bemerkung. Es gilt auch die Umkehrung, d.h. existiert zur Funktion $f : D \rightarrow M$ eine Abbildung $f^{-1} : M \rightarrow D$, die (2.7) und (2.8) erfüllt, so ist f bijektiv.

Rechnerisch ermittelt man den Funktionsterm der Umkehrabbildung f^{-1} durch Auflösen der Gleichung $y = f(x)$ nach x .

Insbesondere ist also für $b \in M$ eine Lösung der Gleichung $b = f(x)$ durch $x = f^{-1}(b)$ gegeben.

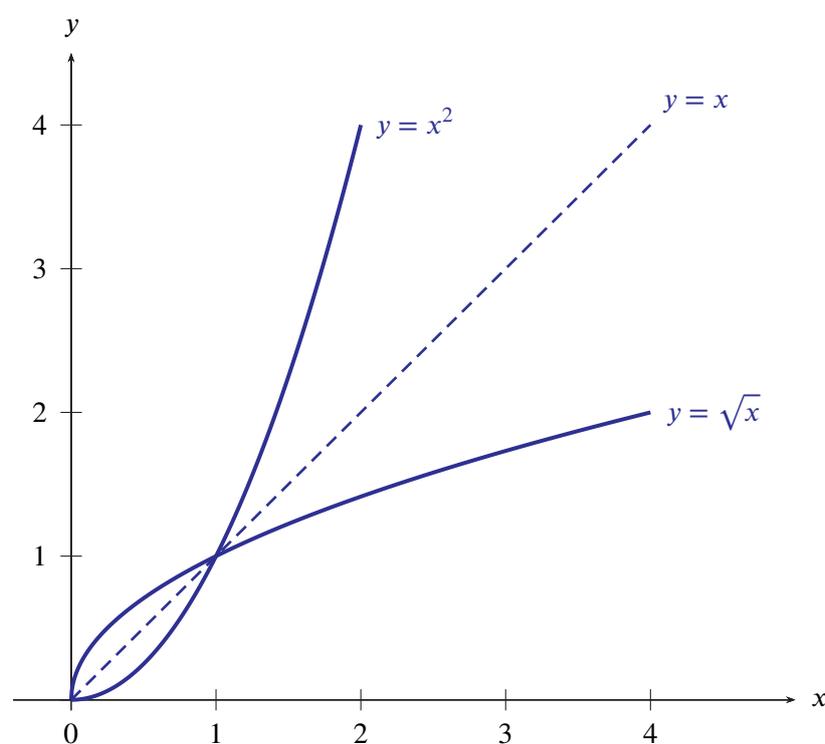
Warnung: In sehr vielen Fällen ist der Wertevorrat der Umkehrfunktion *-zu klein-*, um *alle* Lösungen einer Gleichung zu finden.

Beispiel 2.6. Die Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion $f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ist gegeben durch $f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$.

Die Lösungen der Gleichung

$$x^2 = 5, \quad x \in \mathbb{R},$$

sind $x_{1/2} = \pm\sqrt{5}$. Die Umkehrfunktion liefert aber nur *eine* Lösung, nämlich $\sqrt{5}$. ►



Grafik 2.5: Schaubild zu Beispiel 2.6 Der Graph der Umkehrfunktion f^{-1} entsteht aus dem Graphen von f durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden.

Beim Lösen von Gleichungen ist außerdem zu beachten, dass das Anwenden einer Funktion i.A. *keine* Äquivalenzumformung ist. Betrachte als Beispiel die Gleichung $x = 3$, die genau eine Lösung besitzt. Durch Quadrieren ergibt sich $x^2 = 9$, eine Gleichung mit zwei Lösungen. \rightsquigarrow Eine Probe hilft immer und vermeidet solche Fehler.

2.4 Potenzfunktionen

Eine Potenzfunktion zum Exponenten $a \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ mit einer Zuordnungsvorschrift vom Typ $f(x) = x^a$.

Was verstehen wir unter x^a für $a \in \mathbb{R}$, z.B. $x^{\sqrt{2}}$? Wir definieren dies schrittweise:

Schritt 1: Für $a \in \mathbb{N}$ ist

$$x^a = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_a, \quad \text{und außerdem } x^0 = 1.$$

Diese Definitionen sind für alle $x \in \mathbb{R}$ zulässig.

Schritt 2: Für $a \in \mathbb{Z}$ ist

$$x^a = \frac{1}{x^{-a}}.$$

Diese Definition ist nur noch für $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, möglich.

Schritt 3: Für $a = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, ist $x^a = x^{\frac{1}{n}}$ das Urbild von x unter der bijektiven Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x^n$. Wir schreiben dann auch $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ und $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

Diese Definition ist nur möglich für $x \in [0, \infty)$.

Schritt 4: Für $a = \frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, ist

$$x^a = x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m.$$

Diese Definition ist nur noch für $x \in (0, \infty)$ möglich.

Schritt 5: Für $a \in \mathbb{R}$ nähern wir a durch Brüche an, z.B. $a = \sqrt{2}$ durch

$$1; 1, 4; 1, 41; 1, 414; \dots$$

und betrachten dann

$$x^1, x^{1,4}, x^{1,41}, x^{1,414}, \dots$$

Diese Werte nähern sich dann $x^{\sqrt{2}}$ an.

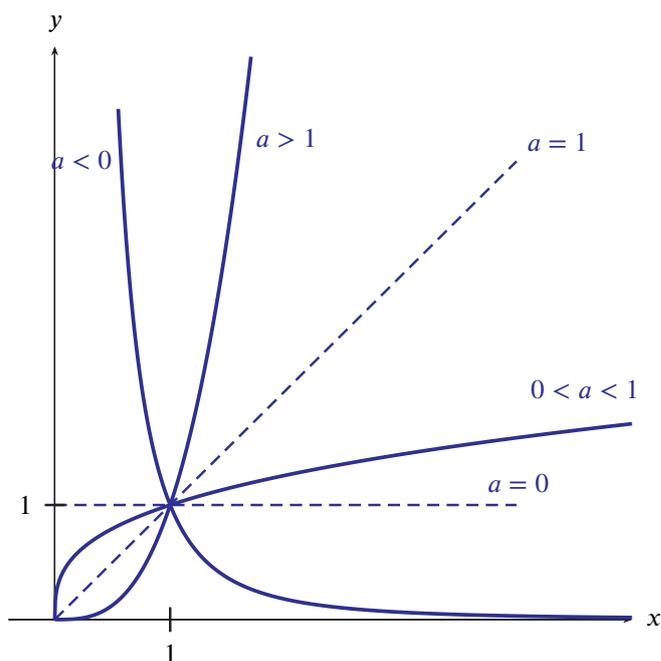
Genauer hierzu und insbesondere zu den auftretenden Grenzübergängen werden wir später lernen, wenn wir reelle Zahlenfolgen behandeln. Für den Moment genügt uns diese Anschauung.

Rechenregel 2.7 (für Potenzen). Seien $x, y \in (0, \infty)$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gelten die Identitäten

$$x^{a+b} = x^a \cdot x^b, \quad (2.9)$$

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}, \quad (2.10)$$

$$(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a. \quad (2.11)$$

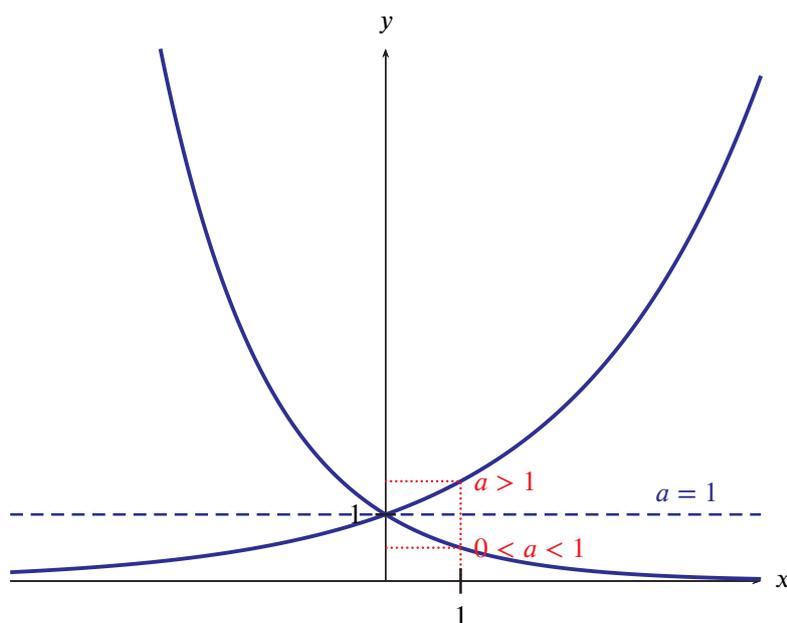
Grafik 2.6: Qualitative Skizze einiger Potenzfunktionen mit Funktionsterm x^a .

2.5 Allgemeine Exponential- & Logarithmusfunktionen

Wir drehen den Spieß jetzt um und betrachten für $a > 0$ Funktionen $\exp_a: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ definiert durch

$$\exp_a(x) = a^x, \quad \text{mit } a > 0.$$

Diese Funktionen nennen wir *Exponentialfunktionen zur Basis a*.



Grafik 2.7: Qualitative Skizzen von drei ausgewählten Exponentialfunktionen

Aus den Rechenregeln für Potenzen ergeben sich unmittelbar folgende Eigenschaften der Exponentialfunktionen:

Rechenregel 2.8 (für Exponentialfunktionen). Seien $x, y \in \mathbb{R}, a, b \in (0, \infty)$. Dann gelten die Identitäten

$$\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y), \quad (\text{Fundamentalgleichung}), \quad (2.12)$$

$$\exp_a(x) \cdot \exp_b(x) = \exp_{a \cdot b}(x), \quad (2.13)$$

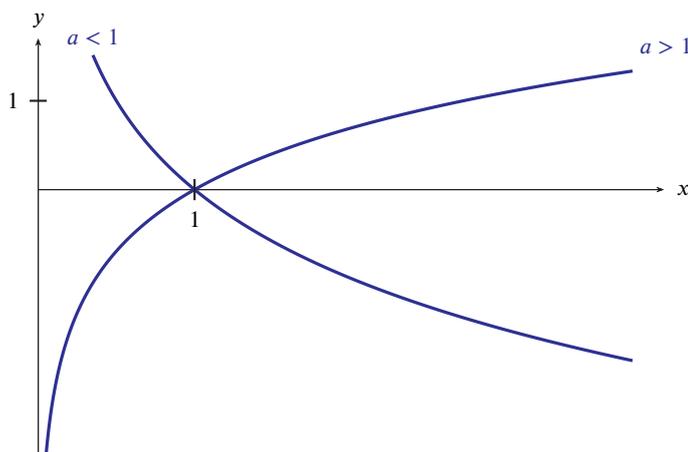
$$(\exp_a(x))^y = \exp_a(x \cdot y). \quad (2.14)$$

Die Funktionen $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ sind für $a \neq 1$ bijektiv. Ihre Umkehrfunktionen sind die *Logarithmusfunktionen zur Basis a*

$$\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log_a(x) \quad \text{mit } a > 0, a \neq 1.$$

Es gilt also

$$y = \log_a(x) \iff a^y = x.$$



Grafik 2.8: Qualitative Skizzen von zwei ausgewählten Logarithmusfunktionen

Aus den Eigenschaften der Exponentialfunktionen ergeben sich folgende Eigenschaften der Logarithmusfunktionen, auch *Logarithmengesetze* genannt:

Rechenregel 2.9 (Logarithmengesetze). Seien $x, y \in (0, \infty)$ und $a > 0, a \neq 1$. Dann gelten

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad (2.15)$$

$$\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x). \quad (2.16)$$

Außerdem gilt die folgende Formel, um den Logarithmus zu einer Basis b auf die Berechnung des Logarithmus zu einer anderen Basis a zurückzuführen, die sogenannte *Umrechnung auf andere Basen*: Für alle $x \in (0, \infty)$ und $a, b > 0, a, b \neq 1$ gilt

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}. \quad (2.17)$$

Diese Rechenregel kann man wie folgt beweisen: Es gilt

$$(2.17) \Leftrightarrow x = b^{\frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}}$$

und

$$b^{\frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}} = \exp_a \left(\log_a \left(b^{\frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}} \right) \right) = \exp_a \left(\frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \log_a(b) \right) = \exp_a(\log_a(x)) = x.$$

2.6 Die natürliche Exponentialfunktion und der natürliche Logarithmus

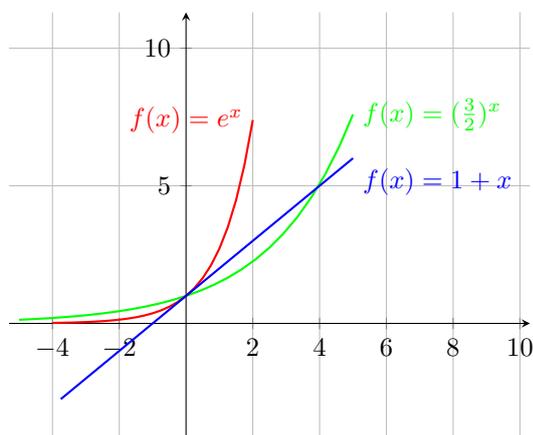
Unter allen Basen $a > 0$ von Exponentialfunktionen gibt es eine Basis, die eine ganz besondere Rolle spielt:

Satz 2.10 (Satz 2.12 in [BJK07]). *Es gibt genau eine Basis $e > 0$ derart, dass*

$$\exp_e(x) \geq 1 + x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Es gilt $e \approx 2,7183$ und diese Basis e heißt Eulersche Zahl.

Die Eulersche Zahl ist irrational. Wir verzichten an dieser Stelle auf einen Beweis des Satzes und verweisen auf die Anschauung, die durch [Grafik 2.7](#) vermittelt wird. Wir schreiben fortan kurz $\exp = \exp_e$. Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ heißt *natürliche Exponentialfunktion*.



Grafik 2.9: Nur für $a = e$ gilt $\exp_a(x) \geq 1 + x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ heißt *natürlicher Logarithmus*

$$\log_e = \ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x).$$

Es gilt also für $x \in (0, \infty)$ und $y \in \mathbb{R}$

$$y = \ln(x) \iff e^y = x.$$

Die Exponentialfunktion nimmt eine bedeutende Rolle ein bei der Modellierung von Wachstums- oder Zerfallsprozessen in der Natur. Wir behandeln nun in den drei folgenden Unterabschnitten drei wichtige Wachstums- bzw. Zerfallsmodelle.

2.6.1 Exponentielles Wachstum & Exponentieller Zerfall

Schauen wir uns zunächst die folgende Definition an:

Definition 2.11 (Exponentielles Wachstum). Ein exponentielles Wachstum liegt vor, wenn das prozentuale Wachstum pro Zeiteinheit konstant ist. Hat das prozentuale Wachstum pro Zeiteinheit einen konstanten negativen Wert, so sprechen wir von exponentiellem Zerfall.

Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel: Wir betrachten eine Bakterienkultur, die sich innerhalb eines Zeitraums von 24 Stunden verdoppelt, egal, wann dieser Zeitraum beginnt. Es liegt ein exponentielles Wachstum vor. Wenn nun $f(t)$ die Anzahl von Bakterien zum Zeitpunkt t (Stunden nach Beobachtungsbeginn), so würde für $t \geq 0$ gelten:

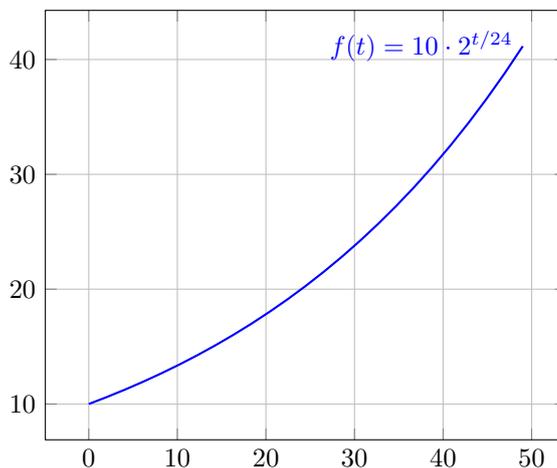
$$f(t) = f(0) 2^{t/24}.$$

Hierbei ist $f(0)$ die Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt $t = 0$, d.h. zum Beginn der Beobachtung.

Wir beweisen kurz, dass dieser Funktionsterm ein exponentielles Wachstum beschreibt. Für jedes $t \geq 0$ und $s \geq 0$ gilt

$$f(t+s) = f(0) 2^{(t+s)/24} = f(0) 2^{t/24} 2^{s/24} = f(t) 2^{s/24}. \quad (2.18)$$

Das bedeutet, dass innerhalb von s Zeiteinheiten die Bakterienkultur um den Faktor $2^{s/24}$ wächst, also um $(2^{s/24} - 1) \cdot 100$ Prozent. Hierbei spielt t , der Beginn des Zeitintervalls keine Rolle, d.h. das prozentuale Wachstum ist konstant.



Grafik 2.10: Grafische Veranschaulichung des Funktionsgraphen zu der Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(t) = 10 \cdot 2^{t/24}$.

Wir erinnern daran, dass für positive Zahlen a, b mit $a \neq 1$ gemäß (2.17) gilt:

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a} \quad (2.19)$$

Es ist sehr wichtig zu beobachten, dass man die Basis der obigen exponentiellen Funktion beliebig wechseln kann. Zum Beispiel gilt

$$2^{t/24} = 3^{\log_3(2)^{t/24}} = 3^{\frac{t}{24} \log_3(2)} = 3^{\frac{t}{24} \frac{\ln(2)}{\ln(3)}}. \quad (2.20)$$

Der exponentielle Zerfall wird ebenso durch eine Exponentialfunktion beschrieben. Hierbei muss die Basis a Element von $(0, 1)$ sein. **Beispiel:** Die Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f(t) = 2^{-t} = (\frac{1}{2})^t = e^{-t \ln(2)}$, beschreibt einen Vorgang, bei dem pro Zeiteinheit der betrachtete Stoff halbiert wird.

Wir wollen nun eine allgemeine Form des Funktionsterms angeben. Vorgänge, die exponentiell wachsen bzw. zerfallen, genügen im Allgemeinen der Gesetzmäßigkeit

$$y(t) = y(t_0) e^{\lambda(t-t_0)} . \quad (2.21)$$

Hierbei haben die auftretenden Größen folgende Bedeutung:

- t_0 : Startzeitpunkt der Beobachtung (sehr häufig $t_0 = 0$)
 $t - t_0$: Verstrichene Zeit seit Beginn der Beobachtung
 $y(t_0)$: Anfangsbestand der betrachteten Größe zu Beginn der Beobachtung
 $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: Wachstums- bzw. Zerfallsrate. Dabei bedeutet
 $\lambda > 0$: echtes Wachstum, d.h. $t_2 > t_1 \Rightarrow y(t_2) > y(t_1)$.
 $\lambda < 0$: echter Zerfall, d.h. $t_2 > t_1 \Rightarrow y(t_2) < y(t_1)$.

Beispiel 3 (Radioaktiver Zerfall). Die zum Zeitpunkt $t > 0$ vorhandene Menge $y(t)$ einer radioaktiven Substanz genügt dem oben beschriebenen Gesetz (2.21). Oft ist in dieser Art von Anwendungen nicht $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben, sondern die Halbwertszeit $T_h > 0$. Wie ergibt sich λ aus T_h ?

Aus der definierenden Eigenschaft der Halbwertszeit ergibt sich, dass für jedes $t \geq t_0$ gilt

$$\frac{y(t + T_h)}{y(t)} = \frac{1}{2} .$$

Einsetzen des Wachstumsgesetzes (2.21) ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{y(t_0)e^{\lambda(t-t_0+T_h)}}{y(t_0)e^{\lambda(t-t_0)}} = e^{\lambda T_h} = \frac{1}{2} &\iff \lambda T_h = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\iff \lambda = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{T_h} = \frac{-\ln(2)}{T_h} . \end{aligned}$$

Das radioaktive Isotop ^{137}Cs (Caesium-137) hat eine Halbwertszeit von etwa 30 Jahren. Folglich lässt sich der radioaktive Zerfall des Isotop durch die Funktion

$$y : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad y(t) = y(0) \exp\left(\frac{-\ln(2)}{30}t\right)$$

geeignet beschreiben.

2.6.2 Beschränktes Wachstum & Beschränkter Zerfall

Nehmen wir von einer Population an, dass sie exponentiell wächst, so impliziert dies gemäß der Gesetzmäßigkeit (2.21) ein Wachstum über jede Grenze hinaus, vgl. Grafik 2.7. Vielen Wachstumsvorgängen in der Natur sind aber oftmals natürliche Grenzen gesetzt, z.B. dem Wachstum von Seerosen auf einem Teich. Bei solchen Vorgängen verlangsamt sich das Wachstum, je näher sich der Bestand $y(t)$ der sogenannten *Sättigungsschranke* S nähert. Ein solcher Vorgang kann durch eine Funktion $y : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$y(t) = S - (S - y(t_0)) \cdot e^{-k(t-t_0)}, \quad (S \in \mathbb{R}, \quad k > 0) \quad (2.22)$$

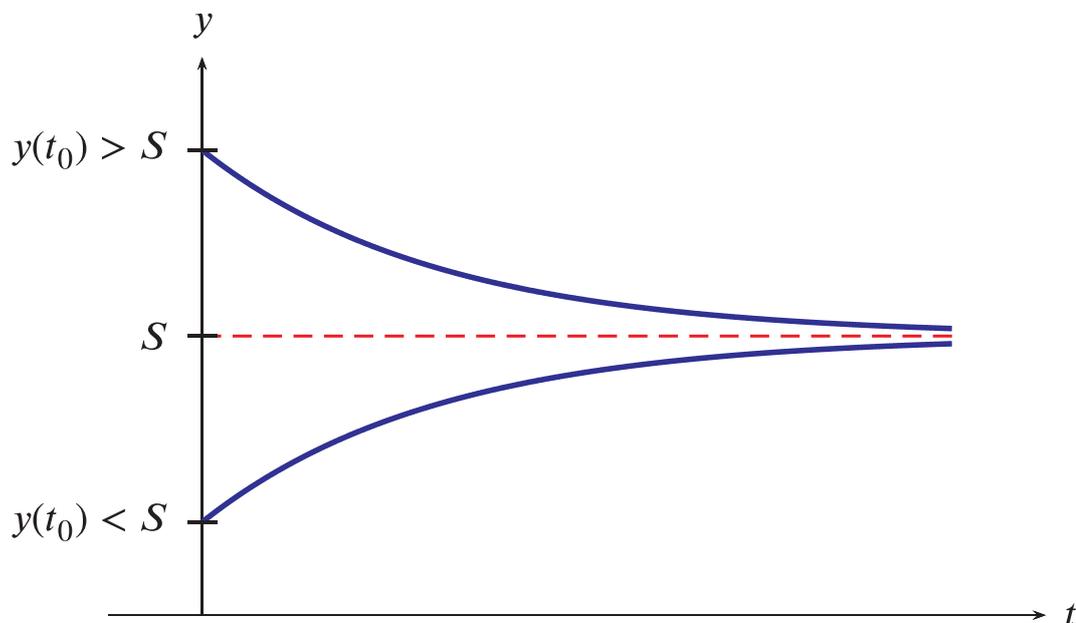
beschrieben werden, vgl. Grafik 2.11. Der Parameter k ist die sogenannte Wachstumskonstante. Er spielt bei der Herleitung von (2.22) eine Rolle (**Hierzu mehr gegen Ende der VL**). Hier liegt Wachstum vor, wenn $y(t_0) < S$ ist. Für $y(t_0) > S$ handelt es sich um einen Zerfallsprozess.

Bemerkung 2.12. Natürlich kann in Anwendungen, in denen nur die Zuordnungsvorschrift bestimmt werden soll, direkt mit dem Ansatz

$$y(t) = S - (S - y(t_0))a^{t-t_0}, \quad (a > 0)$$

gearbeitet werden. Dann entspricht $a = e^{-k}$.

Grafik 2.11: Qualitative Skizze eines beschränkten Wachstums- und Zerfallsprozess.



Beispiel 4 (Abkühlung einer heißen Flüssigkeit). Eine 85°C heiße Flüssigkeit kühlt bei einer Raumtemperatur von 22°C ab. Dieser Abkühlungsprozess genügt der Gesetzmäßigkeit (2.22), d.h. wenn $y(t)$ die Temperatur (in $^\circ\text{C}$) der Flüssigkeit zum Zeitpunkt t (in min) bezeichnet, dann gilt $y(0) = 85$ und für noch zu bestimmendes $k > 0$

$$y(t) = 22 - (22 - 85) \cdot e^{-kt} = 22 + 63(e^{-k})^t.$$

Wir nehmen an, dass die Flüssigkeit nach 10 min noch 62°C heiß ist. Damit kann $a = e^{-k}$ (oder direkt $k > 0$) bestimmt werden:

$$y(10) = 22 + 63 \cdot (e^{-k})^{10} = 62 \iff e^{-10k} = \frac{40}{63} \iff e^{-k} = \left(\frac{40}{63}\right)^{\frac{1}{10}}$$

$$\left(\iff k = \frac{\ln\left(\frac{40}{63}\right)}{-10} \approx 0,0454\right).$$

Insgesamt erhalten wir also

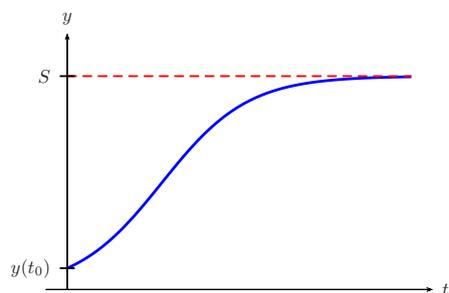
$$y(t) = 22 + 63 \cdot \left(\frac{40}{63}\right)^{\frac{t}{10}}.$$

2.6.3 Logistisches Wachstum

Dieses Wachstumsmodell² berücksichtigt jetzt die Tatsache, dass viele Vorgänge auch zu Beginn der Beobachtung eine kleine Änderungsrate aufweisen. Das beschränkte Wachstum beinhaltet diese Verkleinerung der Änderungsrate nur für Werte nahe an der Sättigungsschranke S .

Ein solches logistisches Wachstum kann beschrieben werden durch $y : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$y(t) = \frac{y(t_0) \cdot S}{y(t_0) + (S - y(t_0)) \exp(-Sk(t - t_0))}, \quad (S, k > 0). \quad (2.23)$$



Grafik 2.12: Qualitative Skizze eines logistischen Wachstumsprozesses.

$y(t_0)$ ist dabei der Anfangsbestand, S die Sättigungsschranke. Es gilt $0 < y(t_0) < y(t) < S$ für jedes $t > t_0$.

Bemerkung 2.13. Genau wie beim beschränkten Wachstum kann man beim logistischen Wachstum auch mit der Zuordnungsvorschrift

$$y(t) = \frac{y(t_0)S}{y(t_0) + (S - y(t_0))a^{S(t-t_0)}}, \quad (a > 0)$$

²Ein Modell des logistischen Zerfalls wollen wir im Rahmen dieser Vorlesung nicht betrachten.

arbeiten, sofern man nicht an der Wachstumskonstanten k interessiert ist. Es gilt $a = e^{-k}$.

Beispiel 5. (Population von Pantoffeltierchen^a) Ein Anfangsbestand von Pantoffeltierchen mit einer Konzentration von 1 Pantoffeltierchen/ml wurde unter Laborbedingungen gezüchtet. Es ist bekannt, dass unter diesen Bedingungen eine Konzentration von höchstens 900 Pantoffeltierchen/ml erreicht werden kann. Unterstellen wir für die Konzentration an Pantoffeltierchen $y(t)$, t in Tagen, logistisches Wachstum, so gilt wegen (2.23) mit $a = e^{-k}$

$$y(t) = \frac{900}{1 + 899 \cdot a^{900t}}.$$

Zur Bestimmung von $a > 0$ benötigen wir ein weiteres Datenpaar: Nach einer Woche wurde eine Konzentration von 620 Tierchen/ml gemessen. Damit

$$\begin{aligned} y(7) = 620 &\iff \frac{900}{1 + 899 \cdot a^{900 \cdot 7}} = 620 \\ &\iff 1 + 899 \cdot a^{900 \cdot 7} = \frac{900}{620} = \frac{45}{31} \\ &\iff a^{900 \cdot 7} = \frac{14}{31 \cdot 899} \\ &\iff a = \left(\frac{14}{27896} \right)^{\frac{1}{7 \cdot 900}} \\ &\left(\iff k = \frac{\ln \left(\frac{14}{31 \cdot 899} \right)}{-6300} \approx 0,001206 \right). \end{aligned}$$

Also lautet das Wachstumsgesetz

$$y(t) = \frac{900}{1 + 899 \cdot \left(\frac{14}{27896} \right)^{\frac{t}{7}}}.$$

^aBsp. 7.4 in [ESS14]

2.6.4 Logarithmische Darstellung

Bei der logarithmischen Darstellung werden die Zahlenwerte auf der Achse einer darzustellenden Größe nicht linear, sondern logarithmisch aufgetragen. Dies ermöglicht die bessere Veranschaulichung von Daten mit starken Größenunterschieden.

Die Wasserstoffionen-Konzentration in einer wässrigen Lösung definiert den pH-Wert³ einer Lösung und gibt an, ob es sich um eine saure, basische oder neutrale Lösung handelt. Eine Lösung wird als *neutral* bezeichnet, falls sich in einem Liter der Lösung 10^{-7} Mol Oxoniumionen (H_3O^+) befinden. Bei einer höheren Konzentration wird die Lösung *sauer* genannt und bei einer niedrigeren Konzentration *basisch*. Die Konzentration erstreckt

³Der pH-Wert (*potentia Hydrogenii*) ist der negative dekadische Logarithmus (Logarithmus zur Basis 10) der Wasserstoffionenaktivität, wobei die Wasserstoffionenaktivität definiert ist als das Produkt der Wasserstoffionenkonzentration und einem sogenannten Aktivitätskoeffizienten.

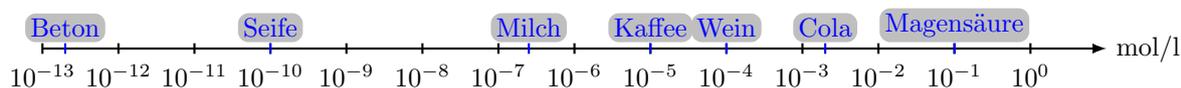
sich im Allgemeinen von 10^{-14} bis 10^0 Mol pro Liter. Die folgende Tabelle gibt die durchschnittliche Konzentration der Oxoniumionen in mol/l von einigen Substanzen an:

Substanz	H_3O^+ mol/l
Magensäure	10^{-1}
Cola	$3 \cdot 10^{-3}$
Wein	10^{-4}
Kaffee	10^{-5}
Milch	$4 \cdot 10^{-7}$
Seife	10^{-10}
Beton	$3 \cdot 10^{-13}$

Trägt man diese Werte auf einem Zahlenstrahl auf, so erhält man folgendes Bild:



Eine zuverlässige Ablesung der Werte ist bei der Visualisierung auf einem (linearen) Zahlenstrahl der Daten nicht möglich. Abgesehen von den Werten für Magensäure und Cola, scheinen alle anderen Werte zusammenzufallen und lassen sich nicht zuverlässig ablesen. Ein besseres Resultat erzielt man, wenn man den Logarithmus der Zahlenwerte aufträgt. Eine derart skalierte Zahlenstrahl wird logarithmische Skala genannt. In diesem Beispiel ist die Anwendung der Logarithmusfunktion zur Basis 10 geeignet.



Bemerkung. In der logarithmischen Darstellung kann die logarithmisch skalierte Achse natürlich nicht bei 0 beginnen, da der Logarithmus von 0 nicht definiert ist. Man kann stattdessen die Skala bei einem Referenzwert beginnen lassen, den man in Abhängigkeit der Problemstellung wählt.

Statt gleicher Abstände zwischen den Werten sind bei der logarithmischer Skala die Abstände zwischen den Exponenten gleich. Bei der Darstellung von Funktionsgraphen in ein zweidimensionales Koordinatensystem ist es häufig sinnvoll bei einem breiten Definitions- und/ oder Wertebereich entweder eine oder beide der Koordinatenachsen logarithmisch zu skalieren.

Einfach-logarithmische Darstellung

Bei der einfach-logarithmischen Darstellung wird eine Koordinatenachse (x - oder y -Achse) logarithmisch skaliert und die andere Achse in linearer Skalierung belassen.

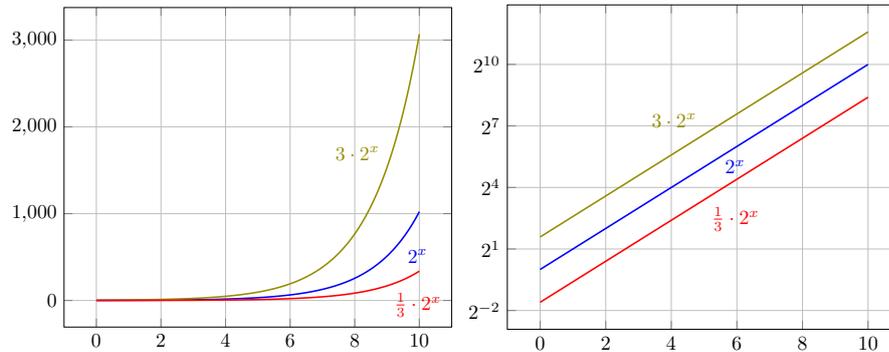
Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ eine Exponentialfunktion zur Basis $a > 0$ der Form

$$f(x) = k \cdot a^{\lambda x}$$

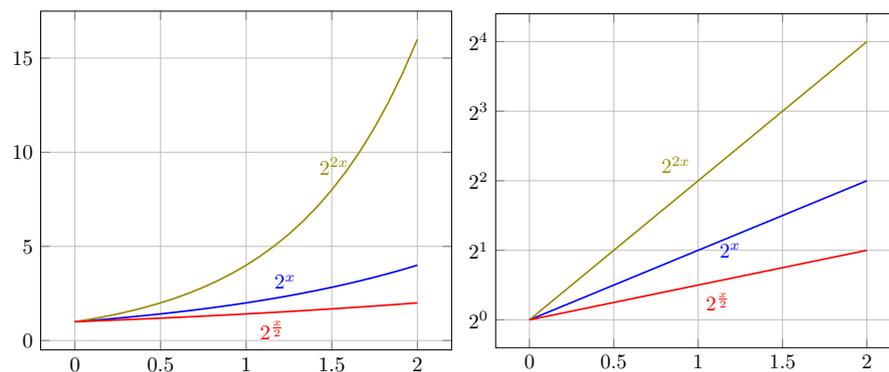
mit $k > 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Bei einer logarithmischen Skalierung der y -Achse zur Basis a folgt

$$\log_a(f(x)) = \log_a(k \cdot a^{\lambda x}) = \log_a(k) + \log_a(a^{\lambda x}) = \log_a(k) + \lambda x.$$

Somit ist der Graph von f bei einer logarithmischen Skalierung der y -Achse eine Gerade mit Steigung λ . Der Punkt $(0, \log_a(k))$ liegt auf dem Graphen von f .



Graphik 2.13: Darstellung der Funktionen $f_1(x) = 3 \cdot 2^x$, $f_2(x) = 2^x$ und $f_3(x) = \frac{1}{3} 2^x$ auf einer linearen Skala (links) und auf einer halb-logarithmischen Skala mit der logarithmischen Skalierung zur Basis 2 auf der y -Achse (rechts)



Graphik 2.14: Darstellung der Funktionen $f_1(x) = 2^{2x}$, $f_2(x) = 2^x$ und $f_3(x) = 2^{\frac{x}{2}}$ auf einer linearen Skala (links) und auf einer halb-logarithmischen Skala mit der logarithmischen Skalierung zur Basis 2 auf der y -Achse (rechts)

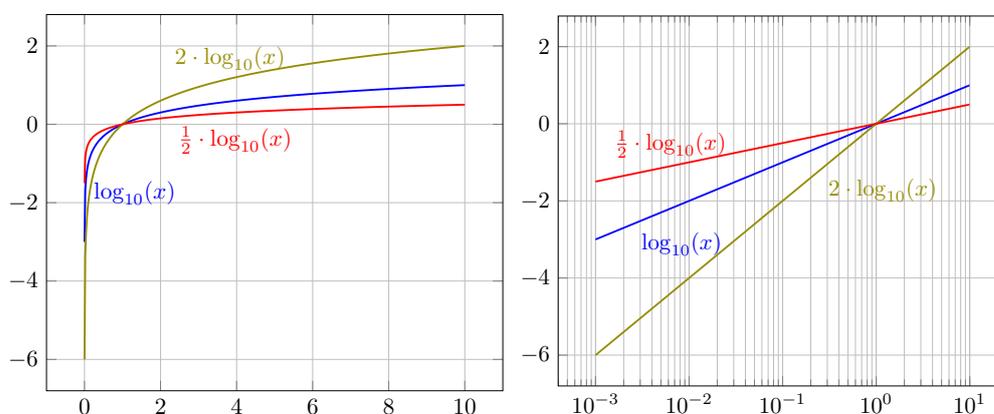
Sei $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine logarithmische Funktion zur Basis $a > 0$ der Form

$$g(x) = c + k \cdot \log_a(x)$$

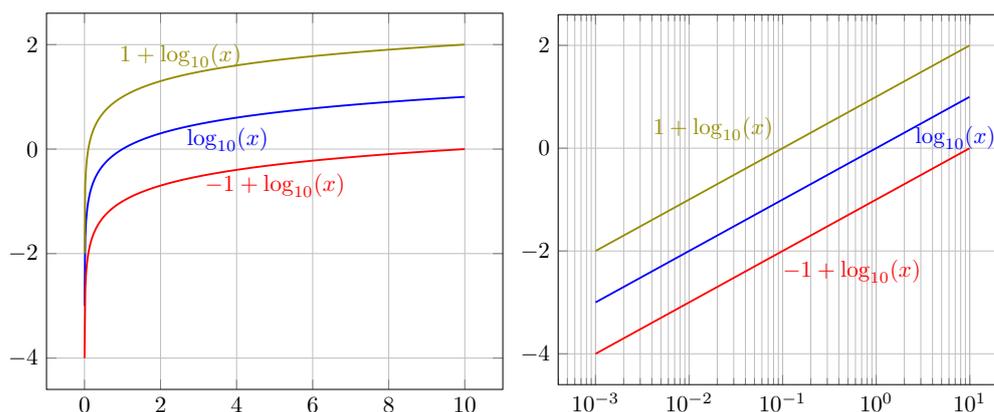
mit $c, k \in \mathbb{R}$. Es gilt mit der Setzung $x^* = \log_a(x)$

$$g(x) = c + k \cdot \log_a(x) = c + kx^*.$$

Folglich ist der Graph von g bei einer logarithmischen Skalierung der x -Achse zur Basis a eine Gerade mit Steigung k durch den Punkt (a^0, c) .



Graphik 2.15: Darstellung der Funktionen $f_1(x) = 2 \log_{10}(x)$, $f_2(x) = \log_{10}(x)$ und $f_3(x) = \frac{1}{2} \log_{10}(x)$ auf einer linearen Skala (links) und auf einer halb-logarithmischen Skala mit der logarithmischen Skalierung zur Basis 10 auf der x -Achse (rechts)



Graphik 2.16: Darstellung der Funktionen $f_1(x) = 1 + \log_{10}(x)$, $f_2(x) = \log_{10}(x)$ und $f_3(x) = -1 + \log_{10}(x)$ auf einer linearen Skala (links) und auf einer halb-logarithmischen Skala mit der logarithmischen Skalierung zur Basis 10 auf der x -Achse (rechts)

Diese Darstellungsmethode erlaubt eine Auftragung von Funktionen mit einem sehr breitem Werte- bzw. Definitionsintervall und eine zuverlässige Ablesung der Wertepaare anhand des Funktionsgraphen.

Doppelt-logarithmische Darstellung

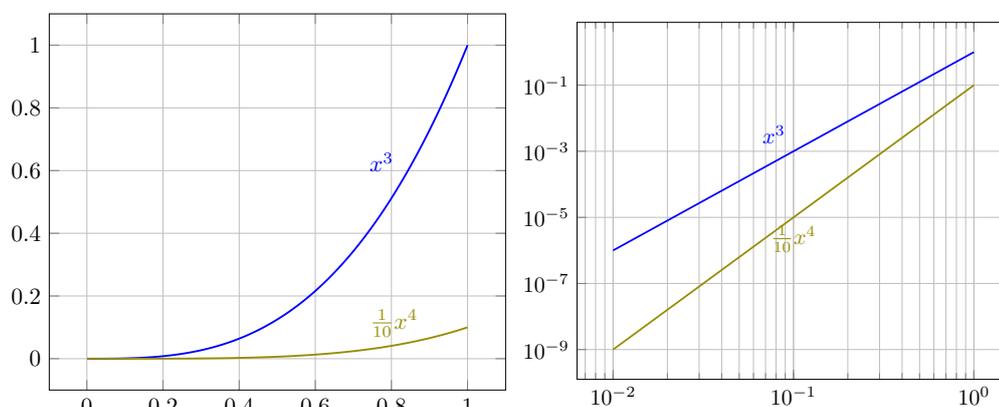
In der doppelt-logarithmischen Darstellung werden beide Koordinatenachsen logarithmisch skaliert. Bei der Auftragung von Potenzfunktionen $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ der Form

$$f(x) = ax^b$$

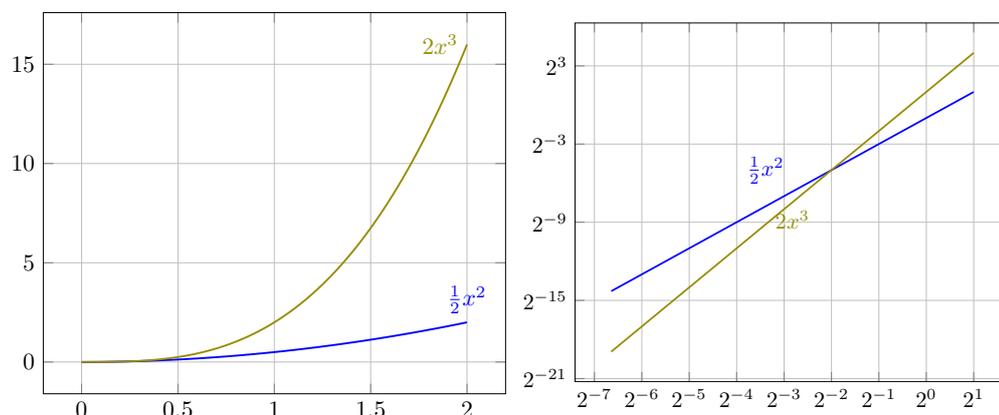
mit $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ auf einem großen Definitionsintervall ist es nicht möglich y -Werte für sehr kleine x -Werte präzise abzulesen. Durch logarithmieren der Funktion folgt

$$f(x) = ax^b \implies \log(f(x)) = \log(ax^b) = \log(a) + \log(x^b) = \log(a) + b \log(x).$$

Die Darstellung der Funktion unter Verwendung von zwei logarithmischen Achsen führt zu einer Geraden, die es erlaubt Funktionswerte präzise und sehr leicht abzulesen.



Graphik 2.17: Darstellung der Funktionen $f_1(x) = x^3$ und $f_2(x) = \frac{1}{10}x^4$ auf einer linearen Skala (links) und auf einer doppelt-logarithmischen Skala mit logarithmischer Skalierung zur Basis 10 (rechts)

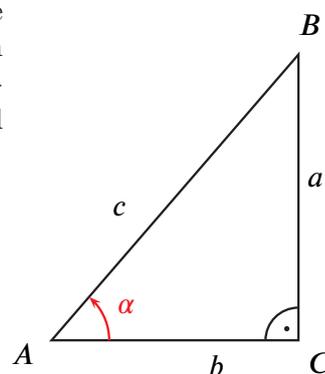


Graphik 2.18: Darstellung der Funktionen $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2$ und $f_2(x) = 2x^3$ auf einer linearen Skala (links) und auf einer doppelt-logarithmischen Skala mit logarithmischer Skalierung zur Basis 2 (rechts)

2.7 Trigonometrische Funktionen

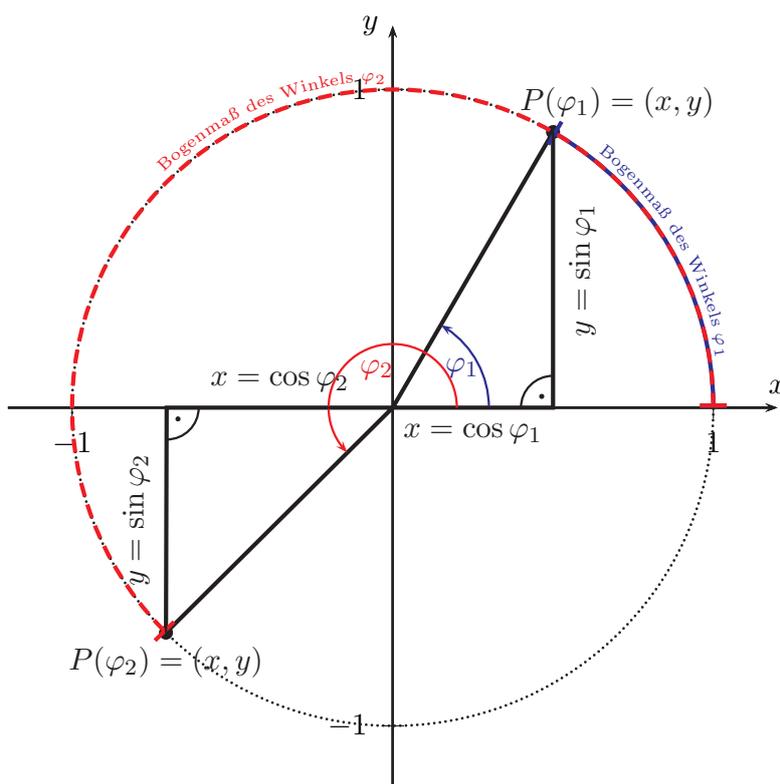
Erinnerung: In einem rechtwinkligen Dreieck bleiben die Seitenverhältnisse unter winkelerhaltenden Transformationen gleich. Die drei möglichen Seitenverhältnisse werden ausgehend vom Bezugspunkt A bzw. Winkel α mit $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ und $\tan \alpha$ bezeichnet:

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{a}{c} \\ \cos \alpha &= \frac{b}{c} \\ \tan \alpha &= \frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\end{aligned}$$



Meistens geben wir Winkel im Bogenmaß an. Das ist die Länge des Bogenstücks am Einheitskreis, das dem Winkel zugeordnet ist, s. [Grafik 2.19](#). Ist ein Winkel φ im Gradmaß gegeben, so berechnet sich das zugehörige Bogenmaß t mit der Formel

$$t = \frac{\varphi}{360^\circ} \cdot 2\pi .$$



Grafik 2.19: Zuordnung eines Winkels φ zu einem Punkt auf der Einheitskreislinie und die Größen $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ im entsprechenden rechtwinkligen Dreieck.

2.7.1 Die Funktionen \sin , \cos und \tan

Jedem $\varphi \in [0, 2\pi)$ können wir in eindeutiger Weise einen Punkt $P(\varphi) = (x, y)$ auf der Einheitskreislinie zuordnen, vgl. [Grafik 2.19](#). Diese Zuordnung ist injektiv. Gemäß der

obigen Betrachtungen in rechtwinkligen Dreiecken gilt nun $x = \cos \varphi$ und $y = \sin \varphi$. Dabei beachten wir die Vorzeichen der x - bzw. y -Werte, die durch das Koordinatensystem vorgegeben sind, d.h. im Beispiel von [Grafik 2.19](#) gilt $\cos \varphi_1 > 0$ und $\sin \varphi_1 > 0$, jedoch $\cos \varphi_2 < 0$ und $\sin \varphi_2 < 0$.

Auf diese Weise sind Funktionen $\sin : [0, 2\pi) \rightarrow [-1, 1]$ und $\cos : [0, 2\pi) \rightarrow [-1, 1]$ erklärt.

Wir setzen diese Funktionen nun periodisch auf ganz \mathbb{R} fort, vgl. Abbildungen [2.20](#) und [2.21](#): Für $\varphi \in [0, 2\pi)$ und $k \in \mathbb{Z}$ setzen wir

$$\sin(\varphi + k \cdot 2\pi) = \sin(\varphi), \quad \text{und} \quad \cos(\varphi + k \cdot 2\pi) = \cos(\varphi).$$

Es gelten die folgenden Symmetrien der Funktionen \sin und \cos :

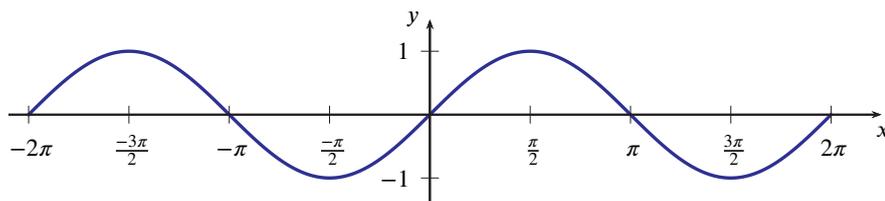
$$\begin{aligned} \sin(x) &= -\sin(-x) && \text{Punktsymmetrie des Sinus zum Ursprung,} \\ \cos(x) &= \cos(-x) && \text{Achsensymmetrie des Cosinus zur } y\text{-Achse.} \end{aligned}$$

Auf der Menge

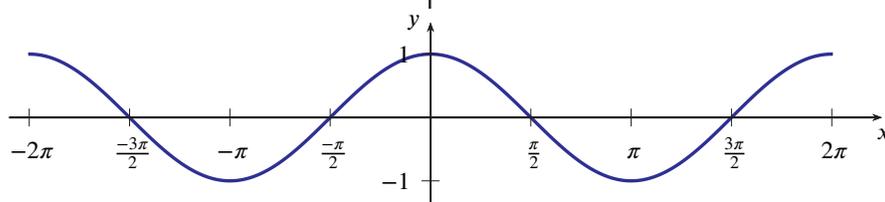
$$T = \{\varphi \in \mathbb{R} : \cos(\varphi) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \varphi \in \mathbb{R} : \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

definieren wir außerdem (vgl. [Grafik 2.22](#))

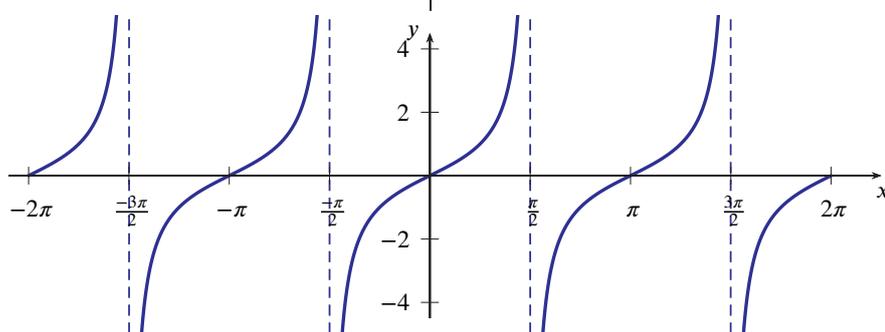
$$\tan : T \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tan(\varphi) = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}.$$



Grafik 2.20:
Graph von $\sin x$



Grafik 2.21:
Graph von $\cos x$



Grafik 2.22:
Graph von $\tan x$

Hier finden Sie ein schönes Applet, mit Hilfe dessen Sie die trigonometrischen Funktionen veranschaulichen können: <https://www.geogebra.org/m/FJtrEDAr>

Aus der periodischen Fortsetzung lässt sich unmittelbar folgern:

$$\cos(x - \pi) = \cos(x - \pi + 2\pi) = \cos(x + \pi) \quad \text{und} \quad \sin(x - \pi) = \sin(x - \pi + 2\pi) = \sin(x + \pi). \quad (2.24)$$

Wir halten einige Regeln fest, die für Sinus und Cosinus gelten:

Satz 2.14 (Einige Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen).

(i) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $|\sin(x)| \leq 1$ und $|\cos(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(iii) $\sin x = 0 \iff x \in \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(iv) $\cos x = 0 \iff x \in \{(2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

(v) $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Sinus ist also gegenüber Cosinus um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben.

Alle Regeln gelten unmittelbar aufgrund der Definition von Sinus und Cosinus im Einheitskreis. Regel (i) ist hierbei als Satz von Pythagoras bekannt, der eine Aussage über das Verhältnis der Seiten in einem rechtwinkligen Dreieck bzw. der zugehörigen Quadrate macht.

2.7.2 Modifizierte Sinus- bzw. Kosinusfunktionen

Wie jede Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R} kann man die trigonometrischen Funktionen verschieben (entlang der y -Achse und/oder entlang der x -Achse) und stauchen bzw. strecken. Dies ist für viele Anwendungen wichtig.

Für $m \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $w \in \mathbb{R}$ und $\theta \in \mathbb{R}$ seien $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

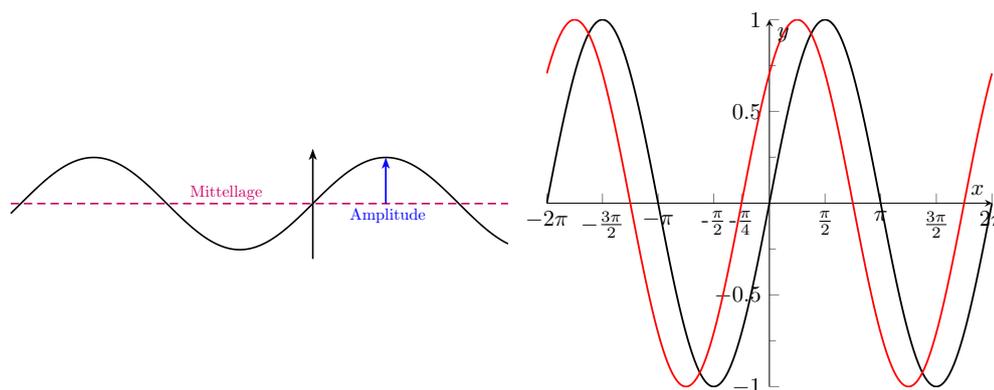
$$\begin{aligned} f(t) &= m + a \cdot \sin(w(t + \theta)), \\ g(t) &= m + a \cdot \cos(w(t + \theta)). \end{aligned}$$

Die verwendeten Parameter erklären sich wie folgt:

- (i) Die Zahl m ist die Mittellage der Funktion, d.h. die Funktion schwingt um den Zustand $y = m$ herum.
- (ii) Die Zahl a ist die Amplitude der Funktion, d.h. der Abstand von der Mittellage zum Hochpunkt der Funktion.
- (iii) Die Zahl w gibt die Winkelgeschwindigkeit an. Diese ergibt sich gemäß

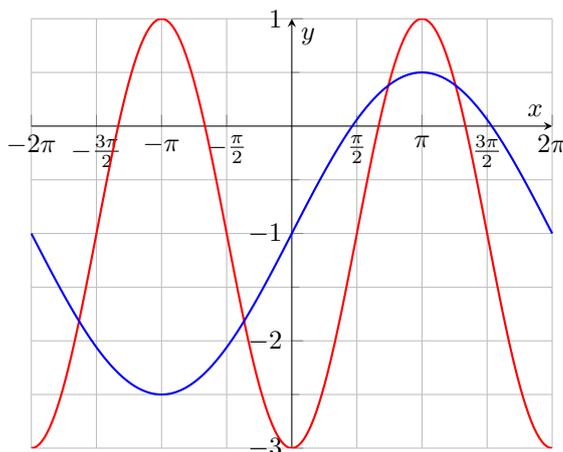
$$w = \frac{2\pi}{\text{Periodenlänge von } f \text{ bzw. } g}.$$

- (iv) Die Zahl θ ist die Phasenverschiebung. Sie gibt an, wie weit man den Graphen von f (bzw. g) nach *rechts* verschieben muss, damit er dem Graphen der Funktion $h(t) = m + a \sin(wt)$ (bzw. $h(t) = m + a \cos(wt)$) entspricht.



Graphik 2.23: Links: Darstellung der Mittellage und Amplitude, Rechts: Beispiel einer Phasenverschiebung für die Sinusfunktion. Es gilt hier $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Hier sind zwei Beispiele:



Graphik 2.24: Aufgabe: Finde die Funktionsvorschriften zu den hier dargestellten verschobenen und gestreckten bzw. gestauchten trigonometrischen Funktionen.

Wir erklären anhand des blauen Graphen, wie man die Funktionsvorschrift ermittelt. Wichtig ist, dass die Darstellung der Lösung nicht eindeutig ist, da Sinus und Cosinus phasenverschoben zueinander sind. Wir können uns also aussuchen, ob wir mit dem Sinusansatz oder mit dem Kosinusansatz arbeiten wollen. Wir sehen bereits, dass der blaue Graph einer modifizierten Sinusfunktion ohne Phasenverschiebung entspricht. Die Mittellage liegt bei $y = -1$. Der Abstand von $y = -1$ und der y -Koordinate des Hochpunkts $y_H = 0.5$ beträgt 1.5, also besitzt die Funktion die Amplitude 1.5. Des Weiteren erkennen wir die Periodenlänge 4π in der Grafik. Unsere Antwort lautet daher

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = -1 + 1.5 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

Selbstverständlich kann man die Phasenverschiebung des Sinus gegenüber des Cosinus ausnutzen um die Funktion als Ausdruck in Cosinus darzustellen. Da laut Satz 2.14 für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \iff \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin(x)$, erhalten wir

$$f(x) = -1 + 1.5 \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right) = -1 + 1.5 \cdot \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = -1 + 1.5 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}(x - \pi)\right).$$

Für den roten Graphen ergibt sich übrigens analog $f(x) = -1 + 2 \cdot \cos(x - \pi)$.

2.7.3 Die Umkehrfunktionen von \sin , \cos und \tan

Schränken wir die die Funktionen \sin , \cos und \tan auf geeignete Teilintervalle von \mathbb{R} ein, so sind diese Funktionen bijektiv⁴ und wir können auf den entsprechenden Definitionsbereichen deren Umkehrfunktionen \arcsin , \arccos und \arctan betrachten⁵.

Die Funktion $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ ist bijektiv; ihre Umkehrfunktion ist

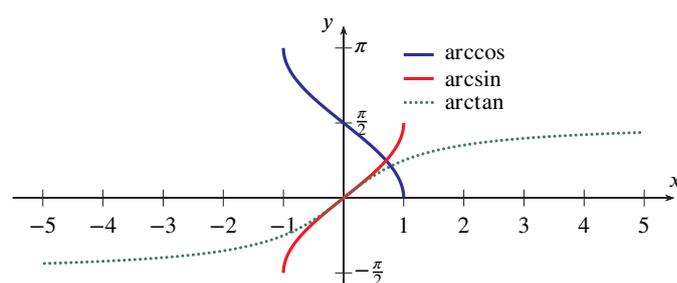
$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Die Funktion $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ ist bijektiv; ihre Umkehrfunktion ist

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$

Die Funktion $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv; ihre Umkehrfunktion ist

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$



Grafik 2.25: Graphen der drei Arkusfunktionen

⁴Es gibt viele Möglichkeiten, Teilintervalle mit dieser Eigenschaft festzulegen. Wir entscheiden uns hier für eine naheliegende Variante; man bezeichnet diese eingeschränkten Funktionen als *Hauptzweig* der entsprechenden Umkehrfunktion.

⁵Auf Taschenrechnern werden diese Funktionen in Anlehnung an die Bezeichnung f^{-1} für die Umkehrfunktion einer Funktion f auch mit \sin^{-1} , \cos^{-1} und \tan^{-1} bezeichnet. Man hüte sich vor Verwechslungen mit den Ausdrücken $\frac{1}{\sin}$, $\frac{1}{\cos}$ bzw. $\frac{1}{\tan}$.

Beispiel 6 (*Innere Uhr* der Ackerschmalwand (*Arabidopsis thaliana*), aus [ESS14, Beispiel 4.2 u. Abschnitt 4.5]).

Wie im Artikel^a von D. Staiger [Sta05] beschrieben wird, registrieren Pflanzen täglich über Photorezeptoren, wie lange es am Tag hell ist. Sie synchronisieren damit ihre *Jahreszeitenuhr*, um einen möglichst günstigen Zeitpunkt zur Blüte zu bestimmen. Bei der Langtagspflanze *Arabidopsis thaliana* beginnt die Blütezeit, sobald es länger als 16 Stunden pro Tag hell ist. Die Tageslänge unterliegt innerhalb eines Jahres Schwankungen und wiederholt sich alle 365 Tage; der längste Tag ist am 21. Juni, der kürzeste am 21. Dezember. Die folgende Funktion gibt beispielhaft für den Ort Göttingen die Tageslänge in Abhängigkeit des Tages t im Jahr an:

$$H(t) = 12,24 + 4,41 \cdot \sin\left(\frac{\pi t}{180} - \frac{9\pi}{20}\right).$$

In Göttingen blüht die Ackerschmalwand also am ersten Tag $t \geq 0$ im Jahr, für den

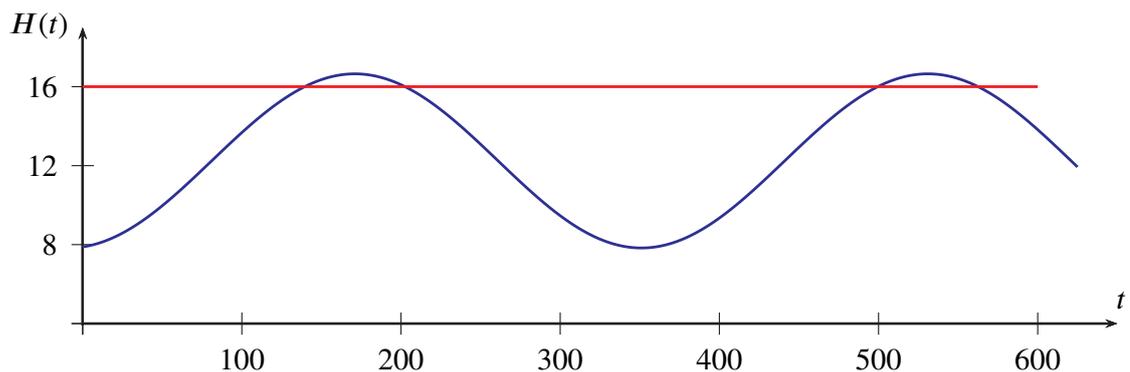
$$H(t) = 16 \iff \sin\left(\frac{\pi t}{180} - \frac{9\pi}{20}\right) = \frac{3,76}{4,41}$$

gilt. Es gibt unendlich viele $t \geq 0$, die diese Gleichung erfüllen, siehe [Grafik 2.26](#). Gesucht ist jedoch das kleinste $t \in [0, 365]$, welches diese Gleichung erfüllt. t ist gegeben durch

$$\frac{\pi t}{180} - \frac{9\pi}{20} = \arcsin\left(\frac{3,76}{4,41}\right) \iff t \approx 139,5.$$

Also blüht die Ackerschmalwand diesen Annahmen zufolge ca. am 139. Tag (19. Mai) des Jahres.

^aErhältlich [hier](#) über die Universitätsbibliothek



Grafik 2.26: Die Tageslänge $H(t)$ in Göttingen am Tag t des Jahres. Die Ackerschmalwand blüht am ersten Tag, für den $H(t) = 16$ gilt.

3 Differentialrechnung

Um ein grundlegendes Verständnis von Grenzübergängen und infinitesimalen Größen zu bekommen, ist ein kleiner Überblick über reelle Zahlenfolgen hilfreich.

3.1 Reelle Zahlenfolgen

Eine *reelle Zahlenfolge* $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Abbildung $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Statt $a(n)$ wie bei Funktionen schreiben wir a_n bei Folgen. a_n heißt *n-tes Folgenglied*.

Beispiel 7. Bei einer Bakterienkultur finde alle 30 Minuten eine Zellteilung statt. $a_0 = 100$ sei der Anfangsbestand an Bakterien. Dann können wir mit a_n die nach n Zeitschritten vorhandene Anzahl bezeichnen. Dadurch ist eine Folge $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ festgelegt. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = a_0 \cdot 2^n = 100 \cdot 2^n.$$

n (Zeitschritt à 30min)	0	1	2	3	4	5	...
a_n (Anzahl der Bakterien nach n Zeitschritten)	100	200	400	800	1600	3200	...

Definition 3.1. Eine Folge $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *konvergent gegen den Grenzwert* $a \in \mathbb{R}$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass für jeden Folgenindex $n > N$ gilt

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Wir schreiben in diesem Fall $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Mit anderen Worten: Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$, wenn in jeder noch so kleinen Umgebung um den Grenzwert alle bis auf endlich viele Folgenglieder liegen. ¹

Beispiel 3.2.

(i) Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei definiert durch $a_n = 3$.

Behauptung: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n - 3| = |3 - 3| = 0 < \varepsilon.$$

¹Eine Visualisierung des Konvergenzbegriffs von Folgen ist [hier](#) zu finden.

(ii) Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei definiert durch $a_n = \frac{1}{n}$.

Behauptung: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle N als eine natürliche Zahl, die größer ist als $\frac{1}{\varepsilon}$.
Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$

$$|a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon .$$

(iii) Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei definiert durch $a_n = \frac{n+1}{n}$.

Behauptung: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle N als eine natürliche Zahl, die größer ist als $\frac{1}{\varepsilon}$.
Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$

$$\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| = \left| \frac{1}{n} \right| < \frac{1}{N} < \varepsilon .$$

(iv) Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei definiert durch $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$.

Behauptung: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle N als eine natürliche Zahl, die größer ist als $\frac{1}{\varepsilon^2}$.
Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N$

$$\left| \frac{\sqrt{n}}{n+1} - 0 \right| = \left| \frac{\sqrt{n}}{n+1} \right| < \left| \frac{\sqrt{n}}{n} \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon . \quad \blacktriangleright$$

Wir nennen eine Folge ohne Grenzwert *divergent*.

Eine wichtige Eigenschaft konvergenter Folgen ist, dass sie beschränkt sind, d.h.

$$\text{es gibt eine Zahl } K > 0, \text{ sodass } |a_n| \leq K \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

Die folgenden Konvergenzeigenschaften sind für die Berechnung von Grenzwerten oft sehr hilfreich:

Satz 3.3 (Grenzwertsätze). Sei $c \in \mathbb{R}$. Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Dann sind die **Summe** $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die **Differenz** $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, das **Produkt** $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c \cdot a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen und es gilt:

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b.$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b.$$

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab.$$

$$(iv) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = ca.$$

Gilt $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $b \neq 0$, dann ist der **Quotient** $(\frac{a_n}{b_n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent und es gilt:

$$(v) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}.$$

Für den Beweis dieser Aussagen sind die folgenden geometrischen Aussagen sehr wichtig: Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad (\text{Dreiecksungleichung}),$$

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \quad (\text{Umgekehrte Dreiecksungleichung}).$$

Beweis. Wir beweisen exemplarisch die Aussagen (i) und (iii). Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Dann gilt

- (i) Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ derart, dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > n_1$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n > n_2$. Sei $N \in \mathbb{N}$ das Maximum der beiden Zahlen n_1, n_2 . Folglich gilt für alle $n > N$

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

- (iii) Sei $\varepsilon > 0$. Wegen (3.1), existiert ein $K_1 > 0$ derart, dass $|a_n| \leq K_1$. Zudem gibt es ein $K_2 > 0$, sodass $|b| \leq K_2$. Es existieren $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ derart, dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2K}$ für alle $n > n_1$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2K}$ für alle $n > n_2$, wobei K das Maximum der beiden Zahlen K_1, K_2 ist. Sei $N \in \mathbb{N}$ das Maximum der beiden Zahlen n_1, n_2 . Dann gilt für alle $n > N$

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \\ &\leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| < K \frac{\varepsilon}{2K} + K \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Beispiel 3.4. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n = \frac{n^3 - 2n}{2n^3 - n + 1}.$$

Behauptung: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$.

Beweis: Es gilt mit Satz 3.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n}{2n^3 - n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{n^2}}{2 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{2}{n^2})}{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3})} = \frac{1}{2}.$$

►

3.1.1 Spezialfall: Die geometrische Folge

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch

$$a_n = a_0 q^n, \quad \text{wobei } q \in (0, \infty), a_0 \in \mathbb{R},$$

heißt *geometrische Folge*.

- Für $q > 1$ und $a_0 > 0$ sind die Folgenglieder a_n für $n \rightarrow \infty$ nach oben unbeschränkt, in Zeichen:

$$a_n \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty;$$

die Folge konvergiert **nicht**. Entsprechend ist a_n nach unten unbeschränkt, falls $q > 1$ und $a_0 < 0$; wir schreiben dann $a_n \rightarrow -\infty$.

- Der Quotient zweier benachbarter Folgenglieder ist konstant, d.h. $a_{n+1}/a_n = q$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Für $q = 1$ gilt: $a_n = a_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$.
- Für $q \in (0, 1)$ konvergiert die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und besitzt den Grenzwert 0. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei N eine natürliche Zahl mit $N \geq \frac{\ln(\varepsilon/a_0)}{\ln(q)}$. Dann gilt für alle $n > N$

$$|a_n - 0| = a_0 q^n = a_0 \exp(n \cdot \ln(q)) < a_0 \exp(\ln(\varepsilon/a_0)) = \varepsilon. \quad (\text{Beachte: } \ln(q) < 0)$$

3.1.2 Das Summenzeichen und Reihen

Seien $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Folgende abkürzende Schreibweise für die Summe wird verwendet:

$$\sum_{j=0}^n a_j = a_0 + \dots + a_n.$$

Dabei ist n der Index des letzten Summanden, j der Laufindex und $j = 0$ (Startindex) bezeichnet den ersten Summanden.

Beispiel 3.5. Für $n \geq 1$ sei $a_n = \frac{1}{n^2}$ und $a_0 = 1$. Dann gilt z.B.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^5 a_j &= 1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} = \frac{2 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25 + 16 \cdot 25 + 9 \cdot 25 + 9 \cdot 16}{9 \cdot 16 \cdot 25} \\ &= \frac{8869}{3600} \approx 2,4636 \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

Für eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist also durch die Vorschrift

$$s_n = \sum_{j=0}^n a_j \tag{3.2}$$

eine neue Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ erklärt. s_n heißt *n-te Partialsumme* und diese neue Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bezeichnet man als *Reihe*².

3.1.3 Spezialfall: Die geometrische Reihe

Die Reihe, die durch (3.2) aus der geometrischen Folge $a_j = a_0 q^j$ entstanden ist, nennt man *geometrische Reihe*. Wegen

$$s_n = \sum_{j=0}^n a_j = \sum_{j=0}^n a_0 q^j = a_0 \sum_{j=0}^n q^j$$

konzentrieren wir uns ab jetzt auf den entscheidenden Ausdruck $\sum_{j=0}^n q^j$. Für $q \neq 1$ gilt

$$\sum_{j=0}^n q^j = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \tag{3.3}$$

²Oft ist es sinnvoll, \mathbb{N}_0 als Indexmenge der Reihe zu wählen, manchmal aber auch nicht. Generell sollte die Indexmenge der Reihe der Indexmenge der Folge angepasst sein.

Diese Formel ermöglicht es also, die n -te Partialsumme explizit zu berechnen **ohne** zuerst alle Potenzen q^j ($0 \leq j \leq n-1$) aufzuaddieren.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^n q^j &= 1 + q^1 + q^2 + q^3 + \dots + q^n \\ q \cdot \sum_{j=0}^n q^j &= q^1 + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}\end{aligned}$$

Subtraktion der zweiten Identität von der ersten ergibt

$$(1 - q) \sum_{j=0}^n q^j = 1 - q^{n+1}.$$

Damit ist Formel (3.3) bewiesen. □

Folglich konvergiert die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ genau dann, wenn $|q| < 1$, und besitzt in diesem Fall den Grenzwert $\frac{1}{1-q}$. Denn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^n q^j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

Beispiel 8 (Zerfallene Menge eines radioaktiven Stoffes). Von einer Menge $Q > 0$ eines radioaktiven Stoffes zerfällt definitionsgemäß die Hälfte nach Ablauf der Dauer einer Halbwertszeit. Nach einer weiteren Halbwertszeit zerfällt ein weiteres Viertel der ursprünglich vorhandenen Menge usw. Für die nach n , $n \in \mathbb{N}$, Halbwertszeiten zerfallene Menge – bezeichnet mit z_n – gilt also

$$z_n = Q \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) = Q \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} \right)^j.$$

Dies ist – abgesehen vom ersten Summanden $j = 0$ – die geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{2}$. Es gilt mit Formel (3.3)

$$z_n = Q \sum_{j=0}^n \left(\frac{1}{2} \right)^j - Q = Q \left(\frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} - 1 \right) = Q \left(1 - \frac{1}{2^n} \right).$$

Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = Q$. Das bedeutet, dass *nach unendlicher Zeit* die gesamte Menge zerfallen sein wird.

3.2 Differenzierbarkeit & Ableitung

In diesem Abschnitt bezeichne I ein offenes Intervall, d.h. es gilt $I = (a, b)$, $I = (a, \infty)$, $I = (-\infty, b)$ (jeweils $a, b \in \mathbb{R}$) oder $I = \mathbb{R}$.

3.2.1 Der Differentialquotient

Definition 3.6. Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar an der Stelle* $x_0 \in I$, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (3.4)$$

existiert. Diesen Grenzwert bezeichnen wir mit $f'(x_0)$, genannt *Ableitung von f an der Stelle* $x_0 \in I$. Wenn f an jeder Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar ist, so nennen wir f *differenzierbar auf I* . In diesem Fall ist durch $x_0 \mapsto f'(x_0)$ eine Funktion $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt, genannt *Ableitung von f* .

Der Quotient

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

heißt *Differenzenquotient* von f im Intervall³ $[x_0, x_0 + h]$ und beschreibt den mittleren Anstieg der Funktion f im Intervall. Dieser Anstieg wird durch die Steigung derjenigen linearen Funktion beschrieben, welche durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ verläuft. Diese Gerade heißt *Sekante* der Funktion f . Den Grenzwert in (3.4) nennen *Differentialquotient*. Die Sekante nähert sich für $h \rightarrow 0$ der sogenannten *Tangente* der Funktion f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ an. Die Steigung der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ stimmt für eine differenzierbare Funktion f im Punkt x_0 mit ihrer Ableitung $f'(x_0)$ überein.

Mit Hilfe der Betrachtungen über Folgen aus [Abschnitt 3.1](#) lässt sich die Schreibweise $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ erläutern: Für **jede** Folge $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen 0 konvergiert, konvergiert auch die Folge

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}$$

gegen ein und denselben Grenzwert. Analog bedeutet $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, dass für **jede** Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die gegen x_0 konvergiert, auch die Folge

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

gegen ein und denselben Grenzwert konvergiert.

Grafisch⁴ tritt der sogenannte *Differenzenquotient* $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ auf als die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Ist f in x_0 differenzierbar, dann streben die Sekanten für $h \rightarrow 0$ gegen die Tangente an der Stelle x_0 .

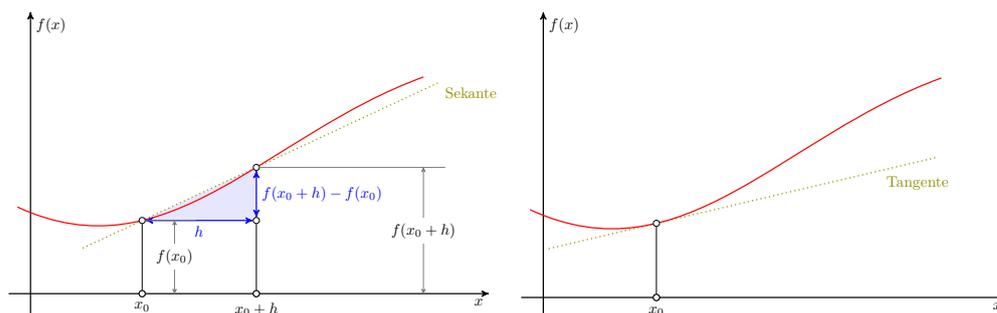
Beispiel 3.7.

- (i) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx + c$, mit $m, c \in \mathbb{R}$. Es gilt $f'(x_0) = m$ für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$, denn:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(x_0 + h) - mx_0}{h} = m.$$

³Wir haben hierbei $h > 0$ vorausgesetzt

⁴Visualisierungen dieses Zusammenhangs sind z.B. [hier](#) zu finden.

Grafik 3.1: Links: Sekante mit Steigungsdreieck, Rechts: Tangente an der Stelle x_0

- (ii) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2$. Es gilt $f'(x_0) = 2x_0$ für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$, denn

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0 + h}{1} = 2x_0 = f'(x_0). \end{aligned}$$

- (iii) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = |x|$ ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$, denn der Grenzwert des Ausdrucks $\frac{|h|}{h}$ existiert nicht für $h \rightarrow 0$. Für Folgen mit $h_n \rightarrow 0$, $h_n > 0$ gilt nämlich $\frac{|h_n|}{h_n} = 1$ und für Folgen $h_n \rightarrow 0$, $h_n < 0$, gilt $\frac{|h_n|}{h_n} = -1$. ▶

Mit mehr oder weniger Aufwand könnten wir an dieser Stelle die Ableitungsfunktionen der elementaren Funktionen aus [Kapitel 2](#) bestimmen. Stattdessen listen wir nun die Funktionen auf und führen den Beweis nur exemplarisch für die Funktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$.

Rechenregel 3.8. Die Funktionen der folgenden Tabelle sind jeweils auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar und besitzen die Ableitungsfunktionen gemäß der Tabelle.

Funktionsvorschrift $f(x)$	Definitionsbereich	Ableitungsfunktion $f'(x)$
$f(x) = mx + c$	\mathbb{R}	$f'(x) = m$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	\mathbb{R}	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = x^a$ ($a \in \mathbb{R}$)	$(0, \infty)$	$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$
$f(x) = \exp(x)$	\mathbb{R}	$f'(x) = \exp(x)$
$f(x) = \sin(x)$	\mathbb{R}	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	\mathbb{R}	$f'(x) = -\sin(x)$

Beweis für $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$. In [Satz 2.10](#) haben wir die e -Funktion eingeführt als diejenige Exponentialfunktion, die an der Stelle $x_0 = 0$ die Tangente mit Gleichung $y = x + 1$ besitzt. Die Ableitung der e -Funktion an der Stelle $x_0 = 0$ ist also 1 und daher gilt

$$\exp'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = 1.$$

Diese Eigenschaft können wir verwenden, um die Ableitung auch an den anderen Stellen zu bestimmen:

$$\exp'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \exp(x) \cdot \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(x),$$

wobei in der letzten Identität [Satz 3.3](#) verwendet haben. \square

3.2.2 Differentiationsregeln

Summen, Produkte und Quotienten

Der folgende Satz gibt an, wie Summen, Produkte und Quotienten zweier differenzierbarer Funktionen abzuleiten sind.

Satz 3.9. Seien $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(i) $a \cdot f + b \cdot g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar in $x_0 \in I$ und es gilt

$$(a \cdot f + b \cdot g)'(x_0) = a \cdot f'(x_0) + b \cdot g'(x_0). \quad (\text{Linearität})$$

(ii) $f \cdot g : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar in $x_0 \in I$ und es gilt

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0). \quad (\text{Produktregel})$$

(iii) Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in I$, dann ist $\frac{f}{g} : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$ und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}. \quad (\text{Quotientenregel})$$

Beispiel 3.10 (Ableitung des Tangens). Mit Hilfe der Quotientenregel stellen wir fest, dass die Funktion $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Es gilt

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}. \quad \blacktriangleright$$

Beispiel 3.11. Mit Hilfe der Produktregel und Linearität stellen wir fest, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \exp(x)$ differenzierbar ist. Es gilt

$$f'(x) = \exp(x) + x \exp(x) = (1+x) \exp(x). \quad \blacktriangleright$$

Verkettungen

Definition 3.12 (Verkettung von Funktionen). Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : A \rightarrow B$ Funktionen. Dann heißt die Funktion $f \circ g : A \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Verkettung oder Komposition von f und g . (Sprechweise: f nach g).

Beispiel 3.13. Wir können $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) = e^{-x^2}$ schreiben als Verkettung der Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x)$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2$; es gilt $h = f \circ g$. ▶

Kommen wir nun zu einem Resultat, das die Frage nach der Differenzierbarkeit einer Verkettung beantwortet.

Satz 3.14 (Kettenregel). *Seien I, J offene Intervalle und $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: I \rightarrow J$ Funktionen. g sei differenzierbar in $x_0 \in I$ und f sei differenzierbar in $g(x_0) \in J$. Dann ist $f \circ g: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$ und es gilt*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Beispiel 3.15. Mit Hilfe der Kettenregel können wir die Ableitung der Verkettung aus [Beispiel 3.13](#) bestimmen:

$$h'(x) = -2x \cdot \exp(-x^2). \quad \blacktriangleright$$

Beispiel 3.16. Mit Hilfe der Kettenregel können wir die Ableitung der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{\sin(x)}$ bestimmen. Es gilt

$$f'(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}. \quad \blacktriangleright$$

Umkehrfunktionen

Wir halten schließlich noch fest, wie man ausgehend von der Ableitung einer bijektiven Funktion die Ableitung der entsprechenden Umkehrfunktion bestimmen kann.

Satz 3.17. *Seien I, J offene Intervalle und $f: I \rightarrow J$ bijektiv und differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für $x \in I$. Dann ist f^{-1} differenzierbar auf J und es gilt für jedes $y_0 \in J$*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}. \quad (3.5)$$

Beispiel 3.18. $\tan: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ ist bijektiv und gemäß [Beispiel 3.10](#) differenzierbar mit $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \neq 0$. Gemäß dem obigen Satz ist folglich

$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

differenzierbar und es gilt

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(y))} = \frac{1}{1 + y^2}. \quad \blacktriangleright$$

Beispiel 3.19. $\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ist bijektiv und gemäß [Rechenregel 3.8](#) differenzierbar mit $\exp'(x) = \exp(x)$. Gemäß [Satz 3.17](#) ist

$$\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

differenzierbar und es gilt

$$\ln'(y) = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{y}. \quad \blacktriangleright$$

Bemerkung. Man kann Voraussetzung und Aussage von [Satz 3.17](#) in folgendem Sinne abschwächen: Wenn f' im Definitionsbereich I Nullstellen besitzt, dann ist f^{-1} nur an den Stellen $y_0 \in J$ differenzierbar, an denen $f'(f^{-1}(y_0)) \neq 0$ gilt, und an diesen Stellen gilt (3.5).

Mit Hilfe von [Satz 3.17](#) können wir nun die Tabelle aus [Rechenregel 3.8](#) vervollständigen:

Funktionsvorschrift $f(x)$	Definitionsbereich	Ableitungsfunktion $f'(x)$
$f(x) = \arcsin(x)$	$(-1, 1)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos(x)$	$(-1, 1)$	$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctan(x)$	\mathbb{R}	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \ln(x)$	$(0, \infty)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

3.3 Extremwertprobleme

3.3.1 Monotonie von Funktionen

Schon aus der Definition der Ableitung geht hervor, dass die Ableitung Informationen über das Steigungsverhalten der Funktion liefert. Wir präzisieren diesen Zusammenhang nun:

Definition 3.20. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

- (i) *monoton wachsend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt: $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- (ii) *monoton fallend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt: $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- (iii) *streng monoton wachsend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- (iv) *streng monoton fallend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Der folgende Satz gibt nun ein Monotoniekriterium mit Hilfe der Ableitung einer Funktion an.

Satz 3.21. Sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt

- (i) $f' > 0$ in $(a, b) \Rightarrow f$ streng monoton wachsend in (a, b)
- (ii) $f' < 0$ in $(a, b) \Rightarrow f$ streng monoton fallend in (a, b)
- (iii) $f' \geq 0$ in $(a, b) \iff f$ monoton wachsend in (a, b)
- (iv) $f' \leq 0$ in $(a, b) \iff f$ monoton fallend in (a, b)

Man beachte, dass in den Aussagen (i) und (ii) keine Äquivalenz erwartet werden kann, wie das Beispiel der auf \mathbb{R} streng monotonen Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$ zeigt. Die Funktion f ist streng monoton wachsend auf ganz \mathbb{R} , aber es gilt $f'(0) = 0$.

3.3.2 Maxima und Minima

Sei nun $I \subset \mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall (offen oder abgeschlossen, beschränkt oder unbeschränkt). Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit der Fragestellung, wie wir Extremwerte, d.h. Maxima und Minima, einer gegebenen Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ auffinden können. Dazu präzisieren wir zunächst, was wir unter dem Begriff *Extremum* verstehen. Hierbei unterscheiden wir zwischen *lokalen* und *globalen* Extremstellen.

Definition 3.22 (Globales Maximum & Minimum). Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass

- (i) an der Stelle $x_0 \in I$ ein *globales Maximum* liegt, falls $f(x_0) \geq f(x)$ für jedes $x \in I$.
- (ii) an der Stelle $x_0 \in I$ ein *globales Minimum* liegt, falls $f(x_0) \leq f(x)$ für jedes $x \in I$.

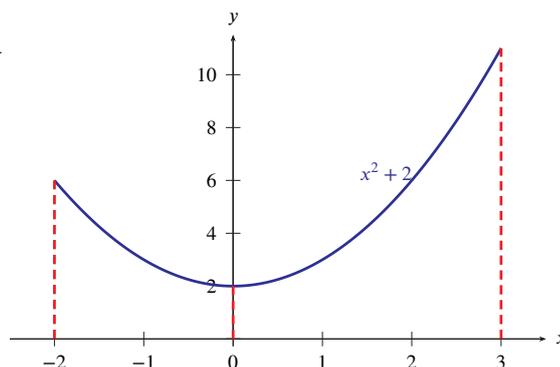
Die Stelle x_0 heißt *globale Extremstelle*, wenn bei x_0 ein globales Maximum oder Minimum liegt. Der Punkt $(x_0, f(x_0))$ wird als *globaler Hochpunkt* bezeichnet, falls die Funktion ein globales Maximum an der Stelle x_0 hat und *globaler Tiefpunkt*, falls sie an der Stelle ein globales Minimum hat.

Definition 3.23 (Lokales Maximum & Minimum). Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir sagen, dass

- (i) an der Stelle $x_0 \in I$ ein *lokales Maximum* liegt, falls eine Zahl $\delta > 0$ existiert mit der Eigenschaft, dass $f(x_0) \geq f(x)$ für jedes $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$.
- (ii) an der Stelle $x_0 \in I$ ein *lokales Minimum* liegt, falls eine Zahl $\delta > 0$ existiert mit der Eigenschaft, dass $f(x_0) \leq f(x)$ für jedes $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$.

Die Stelle x_0 heißt *lokale Extremstelle*, wenn bei x_0 ein lokales Maximum oder Minimum liegt. Der Punkt $(x_0, f(x_0))$ wird als *lokaler Hochpunkt* bezeichnet, falls die Funktion ein lokales Maximum an der Stelle x_0 hat und *lokaler Tiefpunkt*, falls sie an der Stelle ein lokales Minimum hat.

Beispiel 3.24. Betrachte $f: [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2 + 2$. Es gilt:
 Bei $x_0 = -2$ liegt ein lokales Maximum.
 Bei $x_1 = 0$ liegt ein globales Minimum.
 Bei $x_2 = 3$ liegt ein globales Maximum.



Bestimmung von Extremstellen

Wir wollen uns nun mit der Bestimmung von lokalen und globalen Extremstellen differenzierbarer Funktionen beschäftigen:

Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Die Kandidaten für Extremstellen sind:

1. Stellen $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) = 0$. Diese Stellen werden als *kritische Punkte* bezeichnet.
2. Die Randpunkte des Intervalls I , falls diese in dem Intervall liegen.

Man beachte, dass dadurch lediglich **alle Kandidaten** für Extrema ermittelt werden; es ist weder in 1. noch in 2. sichergestellt, dass es sich bei diesen Stellen tatsächlich um Extrema handelt!

Häufig sind Funktionen auf unbeschränkten Intervallen definiert. Dann ist es notwendig die Grenzwerte für $x \rightarrow \pm\infty$ zu bestimmen, um entscheiden zu können, ob es sich um globale oder lokale Extrema handelt. Wir beschreiben im Folgenden was wir damit meinen.

Definition 3.25 (Grenzwerte für $x \rightarrow \pm\infty$). Sei J ein unbeschränktes Intervall und $f : J \rightarrow \mathbb{R}$. Eine Zahl $L \in \mathbb{R}$ heißt *Grenzwert von f für $x \rightarrow \infty$* (bzw. *für $x \rightarrow -\infty$*), wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \rightarrow \infty$ (bzw. $x_n \rightarrow -\infty$) und $x_n \in J$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L.$$

Wir schreiben dann $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ bzw. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

Oft existieren die Grenzwerte für $x \rightarrow \pm\infty$ nicht. Wir schreiben

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty,$$

wenn es zu jeder Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \rightarrow \infty$ und zu jeder reellen Zahl K einen Index $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $f(x_N) > K$ bzw. $f(x_N) < K$ gilt. Eine analoge Notation benutzen wir für $x \rightarrow -\infty$.

Wie ermittelt man, ob ein kritischer Punkt $x_0 \in I$ ein Extremum ist? Führen wir uns die Anschauung der Ableitung und einen kritischen Punkt x_0 vor Augen, so erkennen wir, dass genau dann ein Extremum vorliegt, wenn die Ableitung an der Stelle x_0 einen „Vorzeichenwechsel“ hat. Wir fassen zusammen:

Satz 3.26. Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$. Dann gilt

- (i) An der Stelle x_0 liegt ein lokales Maximum \iff Es gibt eine Zahl $\varepsilon > 0$ sodass $f'(x) \geq 0$ für $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0]$ und $f'(x) \leq 0$ für $x \in [x_0, x_0 + \varepsilon)$ (Vorzeichenwechsel der Ableitung von + nach -).
- (ii) An der Stelle x_0 liegt ein lokales Minimum \iff Es gibt eine Zahl $\varepsilon > 0$ sodass $f'(x) \leq 0$ für $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0]$ und $f'(x) \geq 0$ für $x \in [x_0, x_0 + \varepsilon)$ (Vorzeichenwechsel der Ableitung von - nach +)..

Häufig ist die Ableitungsfunktion $f': (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ selbst differenzierbar, d.h. die zweite Ableitung $f'': (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ existiert. Mit Hilfe der zweiten Ableitung und dem Monotoniekriterium (Satz 3.21) lässt sich ein hinreichendes Kriterium für Extrema aufstellen:

Satz 3.27. Sei $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $x_0 \in (a, b)$ erfülle $f'(x_0) = 0$. Dann gilt

(i) $f''(x_0) < 0 \implies$ an der Stelle x_0 liegt ein lokales Maximum.

(ii) $f''(x_0) > 0 \implies$ an der Stelle x_0 liegt lokales Minimum.

Bemerkung. Man beachte, dass die Kriterien in Satz 3.27 lediglich hinreichend sind. Insbesondere bleibt die Frage, ob an kritischen Punkten x_0 mit $f''(x_0) = 0$ ein Extremum vorliegt, durch diesen Satz unbeantwortet. In solchen Fällen helfen dann nur die notwendigen & hinreichenden Kriterien aus Satz 3.26, d.h. Untersuchung auf Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung.

Beispiel 3.28. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \exp(-x^2)$. Zu bestimmen sind alle Extremstellen von g inklusive der zugehörigen Funktionswerte. *Lösung:*

Schritt 1: Kritische Punkte: f ist auf \mathbb{R} zweimal differenzierbar und es gilt

$$g'(x) = -2x \exp(-x^2), \quad g''(x) = (4x^2 - 2) \exp(-x^2).$$

Einziger kritischer Punkt x_0 ist die Lösung der Gleichung $-2x \exp(-x^2) = 0$, nämlich

$$x_0 = 0.$$

Außerdem ist die zweite Ableitung in dem kritischen Punkt $x_0 = 0$ negativ. Es gilt $f''(0) = -2 < 0$. Bei $x_0 = 0$ liegt also ein lokales Maximum vor mit

$$f(0) = 1.$$

Schritt 2: Randpunkte: Relevant für die Frage nach globalen Extrema ist das Verhalten von f für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

Da die Funktion f auf dem gesamten Definitionsbereich positiv ist, besitzt sie keine globalen Minima. Das lokale Maximum in $x_0 = 0$ ist sogar ein globales Maximum. ▶

Beispiel 3.29. Sei $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = 2e^{-x} + x$. Zu bestimmen sind alle Extremstellen von g inklusive der zugehörigen Funktionswerte.

Lösung:

Schritt 1: Kritische Punkte: g ist auf $(0, \infty)$ zweimal differenzierbar und es gilt

$$g'(x) = -2e^{-x} + 1, \quad g''(x) = 2e^{-x}.$$

Einzig kritischer Punkt x_0 ist die Lösung der Gleichung $2e^{-x} = 1$, nämlich

$$x_0 = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2) \approx 0,69.$$

Außerdem ist die zweite Ableitung auf dem ganzen Definitionsbereich positiv. Bei $x_0 = \ln(2)$ liegt also ein lokales Minimum mit dem Funktionswert

$$g(x_0) = 1 + \ln(2) \approx 1,69.$$

Schritt 2: Randpunkte: Überprüfen des Randpunktes $x_1 = 0$ des Intervalls $[0, \infty)$ liefert $g(0) = 2$. Wir erkennen mit Hilfe der ersten Ableitung, dass g auf dem Intervall $(0, \ln(2))$ streng monoton fallend ist, bei $x_1 = 0$ liegt also ein lokales Maximum.

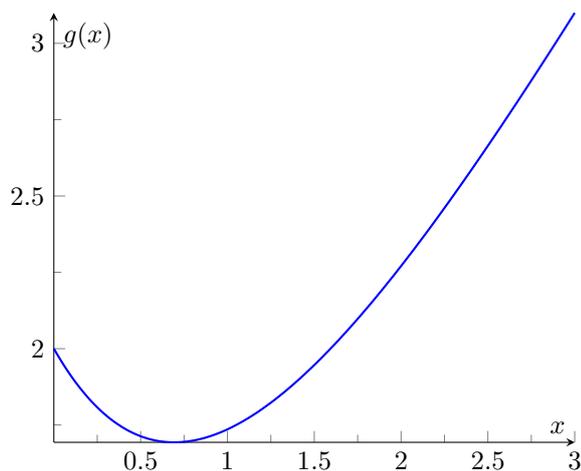
Relevant für die Frage nach globalen Extrema ist auch das Verhalten von g für $x \rightarrow \infty$. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \rightarrow \infty.$$

Daher besitzt die Funktion keine globalen Maxima, und das lokale Minimum in $x_0 = \ln(2)$ ist sogar ein globales Minimum.



Hier eine Skizze der Funktion:



Häufig sind wir daran interessiert Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen zu lösen. Wir beschränken uns in dieser Vorlesung auf Nebenbedingungen, die explizit nach einer Variablen umgeformt werden können. Wir erläutern unser Vorgehen an einem Beispiel.

Beispiel 9. Ein Draht der Länge 20 cm soll eine rechteckige Fläche mit maximalem Flächeninhalt umrahmen. Welche Länge haben dann die Rechteckseiten?

Lösung: Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist gegeben als $A = x \cdot y$, wobei $x, y \in \mathbb{R}$ die Längen der Rechteckseiten sind. Die Nebenbedingung liefert uns

$$20 = 2(x + y) \Leftrightarrow y = 10 - x.$$

Setzen wir dies wieder in A ein erhalten wir eine Funktion

$$A : [0, 10] \rightarrow \mathbb{R}, \quad A(x) = x(10 - x) = 10x - x^2$$

für die Fläche in Abhängigkeit von x . Von dieser Funktion können wir die Extremstellen bestimmen. Es gilt

$$A'(x) = 10 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

Es ist sofort klar, dass es sich bei $x = 5$ um eine Maximalstelle handeln muss, da der Graph von A einer nach unten geöffneten Parabel entspricht. Die Fläche wird also maximal für $x = y = 5$ cm und hat dann einen Flächeninhalt von $A = 25$ cm².

3.3.3 Hilfsmittel zur Bestimmung von Grenzwerten: Die Regel von l'Hospital

Wir haben gesehen, dass das Grenzwertverhalten einer Funktion im Unendlichen bei der Untersuchung von Maxima und Minima von Funktionen auf unbeschränkten Intervallen sehr wichtig ist. Zur Frage, ob ein vorgelegter Grenzwert der Form $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ existiert, gibt es eine Regel, welche die Ableitungen der auftretenden Funktionen verwendet: Die *Regel von l'Hospital*⁵:

Sei $a \in \mathbb{R}$ oder $a = -\infty$. Für differenzierbare $f, g : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ oder $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (3.6)$$

Betrachtet man stattdessen differenzierbare Funktionen $f, g : (-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $b \in \mathbb{R}$ oder $b = \infty$, so kann man in den obigen Voraussetzungen $x \rightarrow \infty$ gegen $x \rightarrow -\infty$ ersetzen und erhält in diesem Fall

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (3.7)$$

Beispiel 3.30. Wir untersuchen das Grenzverhalten von $x^2 e^{-x}$ für $x \rightarrow \infty$. Die Voraussetzung zur Anwendung von (3.6) sind gegeben und wir wenden diese Regel zweimal an:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\exp(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\exp(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\exp(x)} = 0. \quad \blacktriangleright$$

⁵Benannt nach dem Franzosen GUILLAUME FRANÇOIS ANTOINE, MARQUIS DE L'HOSPITAL (1661–1704).

Dieses Beispiel kann man auch verallgemeinern und damit einsehen, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = 0 \quad \text{für jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Mit anderen Worten: Die Exponentialfunktion strebt *schneller* gegen Unendlich als jede Potenzfunktion.

4 Integralrechnung

4.1 Einführung und Motivation

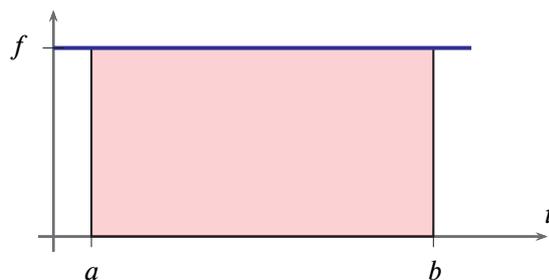
Insbesondere auch in den Biowissenschaften spielt die Untersuchung von Konzentrationen eine wichtige Rolle, z.B. die Untersuchung der Blutalkoholkonzentration oder der Schadstoffkonzentration in der Atemluft. Wir greifen das Beispiel der Schadstoffkonzentration, d.h. die Menge an Schadstoffen pro Volumeneinheit (etwa in $\frac{\text{mg}}{\text{m}^3}$), für diesen einführenden Abschnitt auf.

Es ist sinnvoll anzunehmen, dass die Schadstoffmenge, die ein Mensch über die Atemluft aufnimmt, näherungsweise proportional zur Schadstoffkonzentration und zur Zeitdauer ist, die diese Person der unsauberen Luft ausgesetzt ist. Das Verhältnis von aufgenommener Menge Luft (Volumen) pro Zeiteinheit sei konstant. Von Interesse ist die gesamte Schadstoffmenge S , der die Person in einem vorgegebenen Zeitraum ausgesetzt ist.

Wenn wir also zunächst die zusätzliche Annahme treffen, dass die zeitliche Schadstoffdichte mg/sec – bezeichnet mit f – im Beobachtungszeitraum nicht variiert, ergibt sich die Schadstoffmenge S , der die Person im Zeitraum $[a, b]$ ausgesetzt ist, durch

$$S = f \cdot (b - a).$$

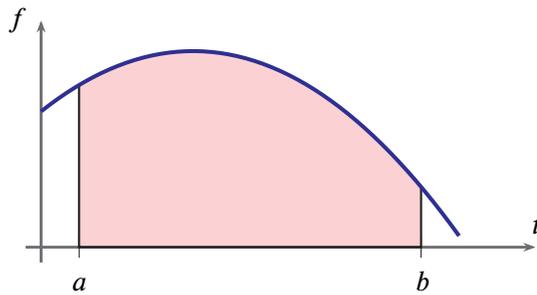
Dies entspricht der Fläche des Rechtecks mit Höhe f und Breite $b - a$:



Grafik 4.1: Ist die Schadstoffkonzentration f (in blau) zeitlich konstant, so ergibt sich die gesamte Schadstoffmenge, der die Person im Zeitintervall $[a, b]$ ausgesetzt ist, als Flächeninhalt des roten Rechtecks.

Diese Situation verkompliziert sich in mathematischer Hinsicht, wenn sich die Schadstoffkonzentration im zeitlichen Verlauf ändert. Die zu berechnende Fläche ist nun kein Rechteck mehr, sondern eine Fläche, die durch die Funktion f , die Zeitachse sowie durch die Zeitpunkte $a < b$ berandet wird:

Die Idee zur Berechnung der gesuchten Fläche besteht darin, sie durch schmale Rechtecke aufzufüllen. Wir präzisieren dies im folgenden Abschnitt.



Grafik 4.2: Problemstellung bei zeitlich variierender Schadstoffkonzentration f (in blau)

4.2 Definition des Integrals

4.2.1 Approximation durch Ober- und Untersumme

Seien $a < b$ sowie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion.

Zu einer vorgegebenen *Feinheit* $n \in \mathbb{N}$ unterteilen wir das Intervall $[a, b]$ in n gleich große Teilintervalle $[x_{i-1}, x_i]$, also

$$x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Offensichtlich hat jedes Teilintervall die Länge $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$.

Untersumme In jedem Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ wählen wir als Höhe des Balkens den Funktionswert an einer Stelle $l_i \in [x_{i-1}, x_i]$ mit

$$f(l_i) \leq f(x) \text{ für alle } x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n.$$

Der i -te Balken hat also die Breite $\frac{b-a}{n}$ und Höhe $f(l_i)$. Die Summe der Flächeninhalte der n Rechtecke, also

$$U_n = \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f(l_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(l_i),$$

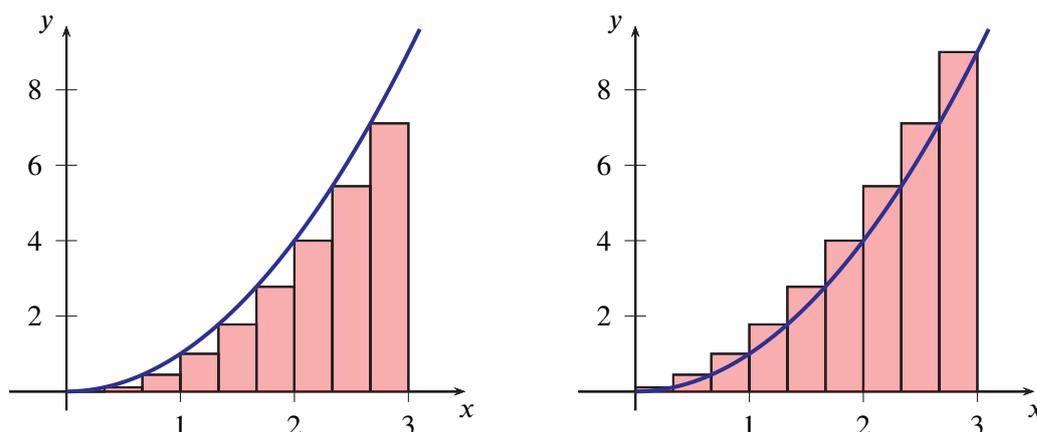
wird als n -te *Untersumme* U_n bezeichnet.

Obersumme Analog lässt sich die n -te *Obersumme* O_n definieren, indem man anstelle der l_i nun Stellen $k_i \in [x_{i-1}, x_i]$ wählt mit

$$f(k_i) \geq f(x) \text{ für alle } x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\text{Also } O_n = \sum_{i=1}^n \frac{b-a}{n} f(k_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(k_i).$$

Bemerkung 4.1. Man beachte, dass $f(l_i)$ negativ sein kann. In diesem Fall ist auch $\frac{b-a}{n} f(l_i)$ negativ, d.h. hier geht der Flächeninhalt des entsprechenden Balkens mit negativem Vorzeichen ein.



Grafik 4.3: Untersumme (links) und Obersumme (rechts) der Funktion $x \mapsto x^2$ mit $a = 0$, $b = 3$, $n = 9$, $l_i = x_{i-1}$ und $k_i = x_i$.

Wir nennen eine Funktion nun integrierbar, wenn bei *unendlicher Feinheit* ein sinnvoller Grenzwert zustande kommt:

Definition 4.2. Seien $D \subset \mathbb{R}$ und $[a, b] \subset D$, $a < b$. Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (Riemann-)integrierbar auf $[a, b]$, falls die Grenzwerte

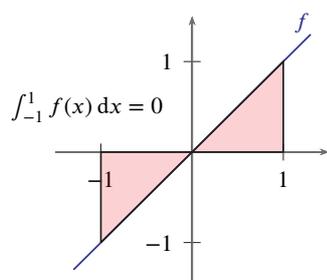
$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} O_n$$

existieren und übereinstimmen. Dieser Grenzwert wird dann mit $\int_a^b f(x) dx$ bezeichnet. Es gilt also

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n.$$

Beispiel 4.3. Sei $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x$. Dann gilt

$$\int_{-1}^1 x dx = 0.$$



Grafik 4.4: Den Flächenstücken unterhalb der x -Achse wird ein negativer Wert zugeordnet.

Flächeninhalt zwischen Graph und x -Achse

Das obige [Beispiel 4.3](#) zeigt, dass bei der Berechnung des Flächeninhalts zwischen Graph und x -Achse besondere Vorsicht geboten ist, sofern die Funktion negative Werte annimmt. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Dann berechnet sich der Flächeninhalt A der Fläche zwischen Graph und x -Achse gemäß

$$A = \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

Weitere Konventionen und hinreichende Bedingungen für Integrierbarkeit

Für eine integrierbare Funktion f vereinbaren wir

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx \quad \text{und} \quad \int_c^c f(x) \, dx = 0 \quad \text{für alle } c \in [a, b].$$

Hinreichend für die Integrierbarkeit auf Intervallen vom Typ $[a, b]$ einer Funktion f sind z.B. folgende Eigenschaften:

- f ist differenzierbar¹ auf D oder
- f ist beschränkt auf $[a, b]$ oder
- f ist monoton wachsend/fallend.

Insbesondere können wir festhalten, dass alle Funktionen, die wir in [Kapitel 2](#) kennengelernt haben, auf beschränkten Teilintervallen ihres Definitionsbereichs integrierbar sind.

¹Diese Voraussetzung ist sehr stark. Es würde auch genügen zu fordern, dass f (stückweise) stetig ist. Diese Begriffe haben wir allerdings nicht eingeführt.

4.2.2 Erste Eigenschaften

Die folgenden Eigenschaften lassen sich mit der obigen Definition leicht nachvollziehen.

Satz 4.4. Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf $[a, b] \subset D$ integrierbare Funktionen. Dann gelten folgende Eigenschaften:

(i) Für alle Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist

$$\int_a^b (\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)) \, dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x) \, dx + \beta \cdot \int_a^b g(x) \, dx. \quad (\text{Linearität})$$

(ii) Für alle $c \in [a, b]$ ist

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx. \quad (\text{Additivität im Integrationsbereich})$$

(iii) Gilt $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so folgt $\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx$.

(Monotonie).

(iv) Es gilt $\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx \leq (b - a) \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$.

4.3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Es wäre zeitraubend und umständlich, bei jeder auftretenden Integralberechnung eine Approximation durch Ober- bzw. Untersummen durchzuführen. Glücklicherweise gibt es ein effektiveres Konzept mit Hilfe von *Stammfunktionen*. Dabei heißt $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ *Stammfunktion* von $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, falls gilt

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für jedes } x \in D.$$

Vorsicht: Offensichtlich gibt es zu gegebenem f unendliche viele Stammfunktionen: Falls F Stammfunktion von f ist, dann ist auch $F + c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion.

Satz 4.5 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes^a Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare^b Funktion.*

(i) *Sei $c \in I$. Eine Stammfunktion von f ist gegeben durch*

$$F(x) = \int_c^x f(t) \, dt, \quad x \in I,$$

d.h. für das so definierte F gilt $F'(x) = f(x)$ für jedes $x \in I$.

(ii) *Für jede Stammfunktion H von f und $a, b \in I$ gilt*

$$\int_a^b f(x) \, dx = H(b) - H(a) =: H(x) \Big|_a^b.$$

^aWie zu Beginn von [Abschnitt 3.2](#) erläutert.

^bAuch hier wäre die Stetigkeit von f wieder hinreichend.

Beispiel 4.6. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \cos(x)$. Dann ist $\sin(x)$ eine Stammfunktion von f , denn es gilt gemäß [Rechenregel 3.8](#) $\sin'(x) = \cos(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe des Hauptsatzes können wir nun z.B. das Integral über das Intervall $[0, \pi/2]$ berechnen:

$$\int_0^{\pi/2} \cos(x) \, dx = \sin(x) \Big|_0^{\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1. \quad \blacktriangleright$$

Elementare Stammfunktionen

Von den elementaren Funktionen aus [Kapitel 2](#) listen wir nun die Stammfunktionen auf. Diese Liste ist (mit Ausnahme der Stammfunktion von $\tan(x)$) die inverse Liste von [Rechenregel 3.8](#) und ihrer Ergänzung mit Hilfe der Ableitungsregel für Umkehrfunktionen auf Seite 46. Dort findet man auch jeweils die Definitionsbereiche, die wir hier zugunsten der Übersichtlichkeit fortlassen.

Rechenregel 4.7.

<i>Funktionsvorschrift $f(x)$</i>	<i>Eine Stammfunktion von f</i>
c ($c \in \mathbb{R}$)	cx
x^a mit $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) $
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$
$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$

Beispiel 4.8. Wir weisen hier exemplarisch nach, dass $\ln|x|$ tatsächlich eine Stammfunktion der Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, ist.

Für $x > 0$ gilt gemäß [Satz 3.17](#) $[\ln|x|]' = [\ln(x)]' = \frac{1}{x}$. Für $x < 0$ gilt

$$[\ln|x|]' = [\ln(-x)]' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}. \quad \blacktriangleright$$

Vorsicht: Das Integral

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

einer Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist nur definiert, falls $[a, b] \subset D$. Anders gesagt: Man darf nicht über Definitionslücken hinweg integrieren. Z.B. ist $\int_a^b \frac{1}{x} \, dx$ nur definiert, wenn $a, b < 0$ oder $a, b > 0$. Man darf nicht *über die Null hinweg integrieren*.

4.4 Techniken zum Auffinden von Stammfunktionen

Im Gegensatz zur Differentiation, für die wir in [Unterabschnitt 3.2.2](#) konkrete Regeln zur Bestimmung der Ableitung aufgestellt haben, ist die Bestimmung von Stammfunktionen von Produkten, Quotienten oder Verkettungen im Allgemeinen viel schwieriger. Dennoch gibt es einige Techniken, welche die Suche nach einer Stammfunktion erleichtern können. Zwei davon behandeln wir in diesem Abschnitt.

4.4.1 Partielle Integration

Satz 4.9 (Partielle Integration). Seien $f, g, g' : D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gilt für $[a, b] \subset D$:

$$\int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx$$

Mit anderen Worten besagt die partielle Integrationsregel, dass $f \cdot g$ eine Stammfunktion von $f' \cdot g + f \cdot g'$ ist. Dies ergibt sich unmittelbar aus der Produktregel der Differentiation (Satz 3.9).

Man kann leider kein generelles Verfahren anbieten, welche der beiden Faktoren als Ableitung f' zu benennen ist, und welche als Funktion g . Ziel ist aber, durch Ableiten einer der beiden Funktionen ein einfacheres oder bereits bekanntes Integral auf der rechten Seite der Formel der partiellen Integration zu erhalten.

Beispiel 4.10. Wir betrachten

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \underbrace{e^x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)} \, dx &= \underbrace{e^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)} \Big|_{-2}^2 - \int_{-2}^2 \underbrace{e^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)} \, dx \\ &= e^2 \cdot 2 - e^{-2} \cdot (-2) - e^x \Big|_{-2}^2 \\ &= 2e^2 + 2e^{-2} - (e^2 - e^{-2}) = e^2 + 3e^{-2}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Obwohl die partielle Integration auch als Regel zur Bestimmung der Stammfunktion von Produkten verstanden werden kann, ist sie mitunter auch nützlich, wenn der Integrand gar kein Produkt ist:

Beispiel 4.11. Gesucht ist eine Stammfunktion von $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Wir verwenden Satz 4.5 (mit $c = 1$) und erhalten

$$\begin{aligned} \int_1^x \ln(t) \, dt &= \int_1^x 1 \cdot \ln(t) \, dt = t \cdot \ln(t) \Big|_1^x - \int_1^x t \frac{1}{t} \, dt \\ &= x \cdot \ln(x) - 0 - \int_1^x 1 \, dt = x \cdot \ln(x) - x + 1. \end{aligned}$$

Also ist $x \cdot \ln(x) - x$ eine Stammfunktion von $\ln(x)$; sie unterscheidet sich nur um die Konstante $+1$ von der oben ermittelten Funktion. Würden wir nicht $c = 1$ setzen, würde sich die entstehende Funktion um eine andere Konstante von $x \cdot \ln(x) - x$ unterscheiden. Sie wäre also ebenso eine Stammfunktion von $\ln(x)$. \blacktriangleright

Bemerkung. Schon aus Satz 4.5 geht hervor, dass die Wahl von c für das Bestimmen einer Stammfunktion (wie in Beispiel 4.11) völlig irrelevant ist. Dies haben wir auch im genannten Beispiel eingesehen. Aus diesem Grund verzichtet man beim Bestimmen

einer Stammfunktion oft auf die Notation der Grenzen und setzt nur in Gedanken als obere Grenze x . Die untere Grenze c ignoriert man. Diese Schreib- und Vorgehensweise ist durch die gemachten Überlegungen legitimiert.

Die Notation der Grenzen beim *Bestimmen von Integralen* (wie in den Beispielen 4.6, 4.10, 4.13 und 4.14) ist hingegen zwingend erforderlich.

4.4.2 Substitutionsregel

Zur Integration von Verkettungen bietet sich folgendes Verfahren an. I bezeichnet wieder ein offenes Intervall.

Satz 4.12 (Substitutionsregel). Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar sowie $g, g' : D \rightarrow I$ differenzierbar. Weiterhin sei F eine Stammfunktion von f . Dann gilt für $[a, b] \subset D$:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \, du = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Obiger Satz besagt mit anderen Worten: $F \circ g$ ist eine Stammfunktion von $(f \circ g) \cdot g'$. Dies folgt unmittelbar aus der Kettenregel der Differentiation (Satz 3.14).

Beispiel 4.13. Zu bestimmen ist für vorgegebene $a, b \in \mathbb{R}$ das Integral

$$\int_a^b x e^{-x^2} \, dx.$$

Hierbei ist $(f \circ g)(x) = e^{-x^2}$ eine Verkettung der Funktionen (vgl. auch Beispiele 3.13 und 3.15)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \exp(x), \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = -x^2.$$

Damit gilt $g'(x) = -2x$ und mit Hilfe der Substitutionsregel erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_a^b x e^{-x^2} \, dx &= \frac{-1}{2} \int_a^b (-2x) e^{-x^2} \, dx = \frac{-1}{2} \int_{-a^2}^{-b^2} e^u \, du \\ &= \frac{-1}{2} e^u \Big|_{-a^2}^{-b^2} = \frac{-1}{2} (e^{-b^2} - e^{-a^2}) = \frac{1}{2} (e^{-a^2} - e^{-b^2}). \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Substitutionsregel im Spezialfall: g' konstant

Wenn die innere Funktion g in der Substitutionsregel linear ist, d.h. von der Form $g(x) = mx + c$, dann vereinfacht sich die Regel zu

$$\int_a^b f(mx + c) \, dx = \frac{1}{m} [F(mb + c) - F(ma + c)]. \quad (4.1)$$

Beweis. Mit $g(x) = mx + c$ gilt $g'(x) = m$. Aus der Substitutionsregel und Satz 4.4(i) folgt dann

$$\int_a^b f(mx + c) dx = \frac{1}{m} \int_a^b mf(mx + c) dx = \frac{1}{m} [F(mb + c) - F(ma + c)]. \quad \square$$

Beispiel 4.14. Zu bestimmen ist $\int_0^{\frac{\pi}{15}} \sin(5x + \pi) dx$.

$-\cos(x)$ ist eine Stammfunktion von $\sin(x)$. Daher gilt wegen (4.1) mit $g(x) = 5x + \pi$

$$\int_0^{\frac{\pi}{15}} \sin(5x + \pi) dx = \frac{1}{5} \left[-\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + \cos(\pi) \right] = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{-1}{10}. \quad \blacktriangleright$$

4.5 Uneigentliche Integrale

4.5.1 Unbeschränktes Integrationsintervall

Zunächst ist unser Ziel, unter gewissen Voraussetzungen auch das Integral über unbeschränkte Intervalle zu definieren. Solche Integrale, die wir bisher nicht zugelassen hatten, werden als *uneigentliche* Integrale bezeichnet. Sie werden als Grenzwert von Integralen, die uns aus den vorigen Abschnitten bekannt sind, definiert. Z.B. definiert man

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_a^L f(x) dx,$$

falls dieser Grenzwert existiert. Analog definiert man

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{L \rightarrow -\infty} \int_L^a f(x) dx$$

und

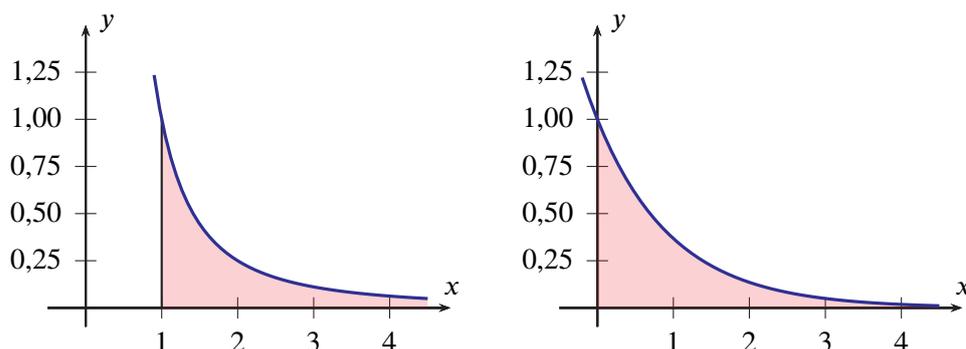
$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx \quad (a \in \mathbb{R}),$$

immer unter der Voraussetzung, dass die auftretenden Grenzwerte existieren.

Beispiel 4.15.

$$(i) \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_1^L x^{-2} dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \left(-x^{-1} \Big|_1^L \right) = \lim_{L \rightarrow \infty} (-L^{-1} + 1) = 0 + 1 = 1.$$

$$(ii) \int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \left(-e^{-x} \Big|_0^L \right) = \lim_{L \rightarrow \infty} (-e^{-L} + 1) = 0 + 1 = 1. \quad \blacktriangleright$$



Grafik 4.5: Die beiden uneigentlichen Integrale aus Beispiel 4.15. Links x^{-2} auf $[1, \infty)$ und rechts $\exp(-x)$ auf $[0, \infty)$.

Vorsicht: Nicht jedes uneigentliche Integral existiert. Z.B. gilt

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_1^L \frac{1}{x} dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \ln(L) = \infty.$$

4.5.2 Definitionslücken des Integranden

Man verwendet auch dann das Konzept des uneigentlichen Integrals, wenn man über ein Intervall integriert, dessen Rand eine Definitionslücke von f ist.

Beispiel 4.16. Sei $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{1}{x^{1/3}}$. An der Stelle 0 ist die Funktion nicht definiert; es gilt² $\lim_{x \searrow 0} f(x) = \infty$. Dennoch existiert das uneigentliche Integral über $[0, 1]$:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1/3}} dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x^{1/3}} dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\frac{3}{2} x^{2/3} \Big|_{\varepsilon}^1 \right) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \varepsilon^{2/3} \right) = \frac{3}{2}. \quad \blacktriangleright$$

Vorsicht: Wie bei uneigentlichen Integrale über unbeschränkte Integrationsintervalle gilt auch hier wieder die gleiche Warnung: Nicht jedes uneigentliche Integrale existiert. Beispielsweise gilt

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon}^1 x^{-2} dx = \lim_{\varepsilon \searrow 0} (-1 + \varepsilon^{-1}) \rightarrow \infty.$$

Außerdem ist es weiterhin *verboten* (und wird es auch immer bleiben), über Definitionslücken hinweg zu integrieren.

²Wir haben den hier auftretenden Grenzwert formal bisher nicht definiert. Wir schreiben $\lim_{\varepsilon \searrow 0} f(x) = L \in \mathbb{R}$, wenn für jede Folge $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\varepsilon_n \in (0, \infty)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\varepsilon_n) = L$.

4.6 Anwendung: Wahrscheinlichkeit, Dichtefunktion und Erwartungswert

In den Naturwissenschaften tauchen häufig Größen X auf, die gewissen statistischen Schwankungen unterliegen (z.B. Körpergröße, Trächtigkeitszeiten bei Säugetieren, Temperatur, Lebenserwartung, ...). Da der Wert der Größe X in einer gewissen Weise vom Zufall abhängt, nennt man X auch Zufallsgröße. Formal ist eine Zufallsgröße eine Abbildung von der Menge aller möglichen Ereignisse eines Zufallsexperiment in die Menge der reellen Zahlen.

Eine Funktion $p : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ heißt *Dichtefunktion* (oder kurz *Dichte*), wenn p auf $(-\infty, \infty)$ integrierbar ist mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \, dx = 1.$$

Häufig liegt für Zufallsgrößen eine empirisch bestimmte Dichte vor. Mit Hilfe der Dichtefunktion kann die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(t_1 \leq X \leq t_2)$ berechnet werden, dass X Werte in einem gegebenen Intervall $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ annimmt:

$$\mathbb{P}(t_1 \leq X \leq t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(x) \, dx.$$

Der *Erwartungswert* \bar{X} einer Zufallsgröße X gibt diejenige Zahl an, die die Zufallsgröße im Mittel annimmt. Für eine Zufallsgröße X mit einer Dichtefunktion p ist der Erwartungswert gegeben durch

$$\bar{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) \, dx. \quad (4.2)$$

Beispiel 4.17 (Exponentialverteilung). Die sog. Exponentialverteilung zum Parameter $\lambda > 0$ wird beispielsweise bei der Frage nach der Lebensdauer von Atomen bei radioaktivem Zerfall verwendet. Sie besitzt eine Dichtefunktion $p : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ definiert durch

$$p(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x), & \text{falls } x \geq 0, \\ 0, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Wir zeigen zunächst, dass p eine Dichtefunktion ist:

Es gilt für $L > 0$ und $\lambda > 0$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \lambda \exp(-\lambda x) \, dx = \lim_{L \rightarrow \infty} (1 - \exp(-L\lambda)) = 1.$$

Damit ist nachgewiesen, dass p tatsächlich eine Dichtefunktion ist.

Wir berechnen nun den Erwartungswert einer durch p definierten Zufallsgröße X :

Mit (4.2) und partieller Integration gilt

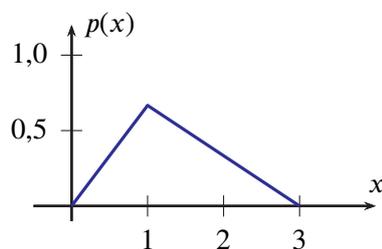
$$\begin{aligned}\bar{X} &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L x \lambda \exp(-\lambda x) = \lim_{L \rightarrow \infty} (-x \exp(-\lambda x)) \Big|_0^L + \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \exp(-\lambda x) dx \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left(-L \exp(-\lambda L) + \frac{1}{\lambda} (1 - \exp(-\lambda L)) \right) = \frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

►

Beispiel 10 (Mittlere Fütterungsintervalle bei Meisen, aus [BJK07, Abschnitt 7.5]). Untersucht werden soll die Zeitdauer T in Minuten zwischen zwei Anflügen des Nestes. Es wurde empirisch folgende Dichtefunktion $p: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ für T ermittelt:

$$p(t) = \begin{cases} \frac{2}{3}t, & \text{für } t \in [0, 1) \\ \frac{1}{3}(3 - t), & \text{für } t \in [1, 3] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man rechnet leicht nach, dass es sich bei p wirklich um eine Dichte handelt. Für die mittlere Fütterungsintervalllänge gilt $\bar{T} = \frac{4}{3}$. Zwischen zwei Nestanflügen liegt also im Mittel eine Dauer von 1min 20s. Die zugehörige Rechnung ist Teil der Übungsaufgaben.



Grafik 4.6: Graph der Dichtefunktion aus Beispiel 10.

5 Matrizen & lineare Gleichungssysteme

5.1 Rechnen mit Matrizen und Vektoren

Eine $(n \times p)$ -Matrix A ist ein rechteckiges Zahlenschema mit n Zeilen und p Spalten:

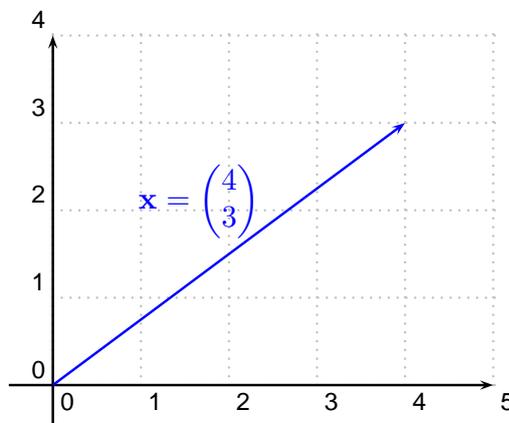
$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Für die Einträge a_{ij} mit $i \in \{1, \dots, n\}$ und $j \in \{1, \dots, p\}$ gilt $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Der Index i heißt *Zeilenindex*, der Index j heißt *Spaltenindex*.

Ein Vektor \mathbf{x} der Länge n ist eine $(n \times 1)$ -Matrix: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ mit $x_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$.

Die Menge aller $(n \times p)$ -Matrizen bezeichnen wir mit $\mathbb{R}^{n \times p}$ und die Menge aller $(n \times 1)$ -Vektoren mit \mathbb{R}^n .

Um einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ in ein Koordinatensystem zu zeichnen, verbindet man den Nullpunkt¹ $(0, 0)$ mit dem Punkt (x_1, x_2) . Vektoren werden als Pfeile mit der Pfeilspitze in (x_1, x_2) dargestellt (siehe Grafik unten). Das folgende Beispiel zeigt eine Darstellung des Vektors $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$



¹Ein Vektor, der im Nullpunkt startet, wird häufig auch als Ortsvektor bezeichnet. Da Vektoren unabhängig von dem Startpunkt sind, sondern nur durch die Richtung und Länge definiert sind, erhält man den gleichen Vektor, wenn man den Start- und Endpunkt des Ortsvektors gleichermaßen verschiebt. Im Rahmen dieser Vorlesung ist es jedoch ausreichend, dass wir uns auf Ortsvektoren beschränken.

Aus dem Satz von Pythagoras folgt, dass die Länge eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ gegeben ist durch $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. In dem obigen Beispiel gilt: $\|x\| = \sqrt{16 + 9} = 5$.

Beispiel 11 ([Ste04, Beispiel 7.6.1]). Es gebe in einer Nahrungskette n Pflanzensorten, die von p Pflanzenfressern konsumiert werden. Die von Pflanzenfresser j benötigte Menge der Pflanzensorte i sei mit a_{ij} bezeichnet. Diese Kosummengen können wir in einer Matrix der obigen Form zusammenfassen.

Angenommen, es gibt nun x_j Pflanzenfresser der Art j . Dann lässt sich die Menge b_1 , die durch alle Pflanzenfresser von der Pflanzensorte 1 konsumiert wird, so berechnen:

$$b_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1p}x_p,$$

und analog für alle Pflanzensorten $i = 1, \dots, n$:

$$b_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{ip}x_p.$$

Produkt Matrix-Vektor Motiviert durch dieses Beispiel definieren wir die Multiplikation einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ mit einem Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ durch

$$A \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2p}x_p \\ \vdots + \dots + \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \quad (5.1)$$

Für den Vektor \mathbf{b} aus [Beispiel 11](#), dessen i -te Komponente b_i die an Pflanzensorte i konsumierte Menge angibt, gilt also $\mathbf{b} = A \cdot \mathbf{x}$.

Des Weiteren definieren wir:

Produkt Zahl-Matrix Für $\lambda \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ definiere

$$C = \lambda A \quad \text{durch} \quad c_{ij} = \lambda a_{ij}, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p. \quad (5.2)$$

Addition Matrix-Matrix Für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ definiere

$$C = A + B \quad \text{durch} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p. \quad (5.3)$$

Multiplikation Matrix-Matrix Für $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ definiere

$$C = A \cdot B \quad \text{durch} \quad c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj}, \quad 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p.$$

(5.4)

Beispiel 5.1. Wir berechnen das Produkt der Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ und $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 + 3 \cdot 5 \\ -3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 & -3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 1 & -3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 3 & 16 \\ 19 & 5 & 36 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

Bemerkung.

- Beim Matrixprodukt $A \cdot B$ muss die Anzahl der Spalten von A mit der Anzahl der Zeilen von B übereinstimmen, sonst ist das Produkt nicht definiert.
- Für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, d.h. wenn A und B quadratische Matrizen derselben Größe sind, sind beide Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ definiert. Diese stimmen aber i.A. *nicht* überein, siehe Übungen.
- Das Produkt Matrix-Vektor ist offensichtlich nur ein Spezialfall des Produkts Matrix-Matrix.
- Ausführliche Rechenbeispiele zu allen vorgestellten Operationen findet man z.B. in Abschnitt 2.1.2 von Eickhoff-Schachtebeck/Schöbel².

²Eickhoff-Schachtebeck/Schöbel, *Mathematik in der Biologie*, Springer 2014

5.2 Lineare Gleichungssysteme

Wir betrachten ein einleitendes Beispiel.

Beispiel 12 ([BJK07, Beispiel 9.1]). Die folgende Tabelle enthält die Nährstoffgehalte in g/100g von vier verschiedenen Lebensmitteln:

	Kartoffeln	Erdbeeren	Fleisch	Möhren
Protein	2	15	1	1
Kohlenhydrate	15	0	7	6
Ballaststoffe	3	0	2	6

x_1, \dots, x_4 bezeichne die Menge an Kartoffeln, Erdbeeren, Fleisch bzw. Möhren in einem bestimmten Menü.

b_1, b_2, b_3 bezeichne die Menge an Protein, Kohlenhydraten bzw. Ballaststoffen in diesem Menü.

Dann gilt mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 15 & 1 & 1 \\ 15 & 0 & 7 & 6 \\ 3 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{die Identität} \quad A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Wir möchten nun aus diesen vier Lebensmitteln ein Menü zusammenstellen, das genau 22 g Protein, 49 g Kohlenhydrate und 20 g Ballaststoffe je 100 g enthält. Gesucht ist also ein Vektor^a $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, der

$$A \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 22 \\ 49 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \text{erfüllt.}$$

^aDie Bedingung, dass die Einträge einer sinnvollen Lösung \mathbf{x} sämtlich nichtnegativ sein müssen, lassen wir vorerst unberücksichtigt.

Definition 5.2.

- (i) Ein *lineares Gleichungssystem (LGS)* ist eine Gleichung der Form $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.
- (ii) Die Matrix $(A|\mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{n \times (p+1)}$, definiert durch Hinzunahme des Vektors \mathbf{b} , also

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1p} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} & b_n \end{array} \right),$$

heißt *erweiterte Koeffizientenmatrix zum LGS $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$* .

Z.B. lautet die erweiterte Koeffizientenmatrix zum LGS in [Beispiel 12](#)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 15 & 1 & 1 & 22 \\ 15 & 0 & 7 & 6 & 49 \\ 3 & 0 & 2 & 6 & 20 \end{array} \right). \quad (5.5)$$

- (iii) Die Lösungsmenge $\mathbb{L}(A; \mathbf{b}) \subset \mathbb{R}^p$ eines LGS besteht aus allen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, die $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ erfüllen. $\mathbf{x} \in \mathbb{L}(A; \mathbf{b})$ heißt *Lösung*.
- (iv) Zwei LGS $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ und $A' \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}'$ heißen *äquivalent*, falls sie dieselben Lösungsmengen besitzen, d.h. falls $\mathbb{L}(A; \mathbf{b}) = \mathbb{L}(A'; \mathbf{b}')$ gilt.

5.2.1 Lineare Gleichungssysteme in Zeilenstufenform

Wenn ein LGS eine besondere Gestalt hat, kann man Lösungen leicht *ablesen*. Eine solche besondere Gestalt ist die folgende: Eine erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|\mathbf{b})$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ liegt in *Zeilenstufenform* vor, falls sie für ein $r \in \{0, 1, \dots, \min(n, p)\}$ folgende Gestalt hat:

$$(A|\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & * & & & & & & & b_1 \\ & & * & & & & & & b_2 \\ & & & * & & & & & b_3 \\ & & & & \dots & & & & \vdots \\ & & 0 & & & & * & & b_r \\ & & & & & & & & b_{r+1} \\ & & & & & & & & \vdots \\ & & & & & 0 & & & b_n \end{array} \right) \quad (5.6)$$

Die Sternchen * kennzeichnen hierbei Einträge in der Matrix, die *ungleich* Null sind. *Alle* Einträge unterhalb der horizontalen Linien müssen *gleich* Null sein. Die horizontalen Linien können verschiedene Längen haben; die vertikalen hingegen erstrecken sich über genau eine Zeile. Insbesondere enthält A genau $n - r$ Nullzeilen.

Satz 5.3 (Lösungen von LGS in Zeilenstufenform). *Ein lineares Gleichungssystem $(A|\mathbf{b})$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ liege für ein $r \in \{0, 1, \dots, \min(n, p)\}$ in Zeilenstufenform (5.6) vor. Dann ergeben sich folgende Fälle für die Struktur der Lösungsmenge $\mathbb{L}(A; \mathbf{b})$:*

Fall 1: *Es gilt $r < n$ und $b_i \neq 0$ für ein $i \in \{r + 1, \dots, n\}$. Mit anderen Worten: Es liegt mindestens eine Zeile mit einem Widerspruch vor. Dann gilt*

$$\mathbb{L}(A; \mathbf{b}) = \emptyset.$$

Fall 2: *Es gilt $r \leq n$ und $b_i = 0$ für alle $i \in \{r + 1, \dots, n\}$. Mit anderen Worten: Es gibt $n - r$ Zeilen vom Typ $0 = 0$. Dann können $p - r$ Komponenten einer Lösung $x \in \mathbb{R}^p$ frei gewählt werden, die übrigen sind durch die r Gleichungen festgelegt.*

Bemerkung 5.4. Fall 2 beinhaltet zwei wichtige Spezialfälle:

- Zusätzlich zu den Bedingungen aus Fall 2 gilt $r = n$. Dann enthält A in der Zeilenstufenform (5.6) keine Nullzeile. Insbesondere existiert dann mindestens eine Lösung.

- Zusätzlich zu den Bedingungen aus Fall 2 gilt $r = p$. Dann können $p - r = 0$ Komponenten einer Lösung frei gewählt werden, d.h. es gibt genau ein $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p$, das $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ löst.

Diese beiden Spezialfälle können offenbar auch gleichzeitig auftreten, wenn nämlich $p = n = r$ gilt.

5.2.2 Das Gaußsche Eliminationsverfahren

Um ein gegebenes LGS in ein äquivalentes System mit einfacherer Form zu bringen, halten wir die Operationen fest, die dabei erlaubt sind.

Rechenregel 5.5 (Elementare Zeilenoperationen). Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Folgende Zeilenoperationen überführen ein lineares Gleichungssystem $(A|\mathbf{b})$ in ein äquivalentes System:

Typ I: Addition des λ -fachen einer Zeile i zu einer Zeile k , wobei $i \neq k$, $\lambda \neq 0$.

Typ II: Vertauschen von zwei Zeilen.

Typ III: Multiplikation einer Zeile i mit einer Zahl $\lambda \neq 0$.

Diese Typen von Operationen reichen aus, um ein lineares Gleichungssystem in ein äquivalentes System in Zeilenstufenform zu überführen. Die Hintereinanderausführung dieser Operationen wird als *Gaußsches Eliminationsverfahren* oder *Gauß-Algorithmus*³ bezeichnet. Wir halten dies in folgendem beruhigenden Satz fest:

Satz 5.6. Ein lineares Gleichungssystem (A, \mathbf{b}) mit $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ kann durch endlich viele Anwendungen von Zeilenoperationen vom Typ I und II in Zeilenstufenform (5.6) gebracht werden. Dabei hängt die Zahl $r \in \{0, 1, \dots, \min(n, p)\}$ nicht vom gewählten Verfahren ab. Die Zahl r heißt Rang der Matrix A .

Zeilenoperationen vom Typ III werden theoretisch zum Erreichen der Zeilenstufenform nicht benötigt, diese Operationen sind aber nützlich, um die Einträge der entstehenden Matrix möglichst einfach zu halten. Das zeigt auch das folgende Beispiel.

Beispiel 5.7. Wir greifen das Zahlenbeispiel aus [Beispiel 12](#) auf: Wir wollen die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems mit $n = 3, p = 4$ bestimmen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 15 & 1 & 1 & 22 \\ 15 & 0 & 7 & 6 & 49 \\ 3 & 0 & 2 & 6 & 20 \end{array} \right). \quad (5.7)$$

Wegen $r \leq \min(n, p) = \min(3, 4) = 3$ gilt insbesondere $r < p = 4$. Wir wissen also schon aus [Satz 5.3](#) und [Bemerkung 5.4](#), dass es entweder *keine* oder *unenendlich viele* Lösungen

³Benannt nach dem dt. Mathematiker CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855)

gibt.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 15 & 1 & 1 & 22 \\ 15 & 0 & 7 & 6 & 49 \\ 3 & 0 & 2 & 6 & 20 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \cdot \frac{-15}{2} \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \cdot \frac{-3}{2} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 15 & 1 & 1 & 22 \\ 0 & -\frac{225}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -116 \\ 0 & -\frac{45}{2} & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -13 \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot (-2) \\ | \cdot 2 \end{array} \\ \rightarrow & \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 15 & 1 & 1 & 22 \\ 0 & 225 & 1 & 3 & 232 \\ 0 & -45 & 1 & 9 & -26 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \cdot \frac{1}{5} \\ \leftarrow + \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 15 & 1 & 1 & 22 \\ 0 & 225 & 1 & 3 & 232 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} & \frac{48}{5} & \frac{102}{5} \end{array} \right) \begin{array}{l} | \cdot \frac{5}{6} \end{array} \\ \rightarrow & \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 15 & 1 & 1 & 22 \\ 0 & 225 & 1 & 3 & 232 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 17 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Die letzten beiden erweiterten Koeffizientenmatrizen sind in Zeilenstufenform; es gilt $r = n = 3$. Daher gibt es unendlich viele Lösungen, wir können $p - r = 4 - 3 = 1$ Eintrag der Lösung frei wählen; wir setzen $x_4 = t$. Dann ergibt sich aus der letzten Zeile

$$x_3 + 8t = 17 \iff x_3 = 17 - 8t.$$

Einsetzen in die zweite Zeile ergibt

$$225x_2 + (17 - 8t) + 3t = 232 \iff x_2 = \frac{232 - 17}{225} + \frac{5t}{225} = \frac{43}{45} + \frac{t}{45}.$$

Einsetzen in die erste Zeile ergibt

$$2x_1 + 15 \left(\frac{43}{45} + \frac{t}{45} \right) + (17 - 8t) + t = 22 \iff x_1 = \frac{1}{2} \left(22 - \frac{43}{3} - 17 + \left(7 - \frac{1}{3} \right) t \right) = \frac{-14}{3} + \frac{10}{3} t.$$

In kompakter Schreibweise: Es gilt

$$\mathbb{L} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \frac{-14}{3} \\ \frac{43}{45} \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{1}{45} \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ für ein } t \in \mathbb{R} \right\}.$$

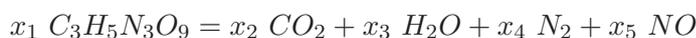
Für beispielsweise $t = 2$ ergibt sich die Lösung $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, d.h. ein Menü mit 200g

Kartoffeln, 100g Erdbeeren, 100g Fleisch und 200g Möhren enthält genau 22g Protein, 49g Kohlenhydrate und 20g Ballaststoffe pro 100g des Menüs.

Will man nur \mathbf{x} mit sämtlich nichtnegativen Einträgen zulassen, ergibt sich die Einschränkung

$$\begin{aligned} \frac{-14}{3} + \frac{10t}{3} &\geq 0 \quad \text{und} \quad 17 - 8t \geq 0 \\ \iff t &\geq \frac{7}{5} \quad \text{und} \quad t \leq \frac{17}{8} \iff t \in \left[\frac{7}{5}, \frac{17}{8} \right]. \end{aligned} \quad \blacktriangleright$$

Beispiel 13. Nitroglycerin ist eine chemische Verbindung mit der Summenformel $C_3H_5N_3O_9$. Bei dem Zerfall oder der Explosion zerfällt Nitroglycerin in Kohlenstoffdioxid (CO_2), Wasser (H_2O), Stickstoff (N_2) und Stickstoffmonoxid (NO). Die Reaktionsgleichung lässt sich z.B. in der Form



schreiben, wobei x_1, x_2, x_3, x_4 und x_5 die Anzahl der jeweils benötigten Moleküle darstellt.

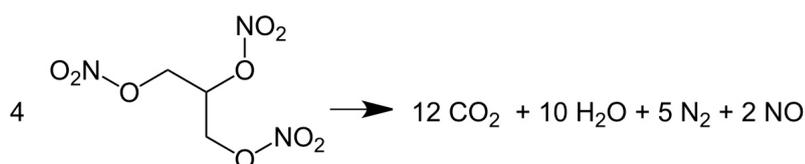
Da die Anzahl der jeweiligen Atome (C, H, N, O) auf beiden Seiten der Reaktionsgleichung übereinstimmen müssen, ergeben sich die folgenden 4 Bedingungen:

- Kohlenstoff (C): $3x_1 = x_2$
- Wasserstoff (H): $5x_1 = 2x_3$
- Stickstoff (N): $3x_1 = 2x_4 + x_5$
- Sauerstoff (O): $9x_1 = 2x_2 + x_3 + x_5$.

Damit ergibt sich das folgende Gleichungssystem in Matrixform:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 9 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Dieses Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen. Es ist Teil der Übungsaufgaben die Lösungsmenge und die kleinste ganzzahlige Lösung zu bestimmen.



Grafik 5.1: Umwandlung aus [Beispiel 13](#)

5.3 Die Determinante

Wir konzentrieren uns für den Rest dieses Kapitels auf quadratische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. In diesen Fällen enthält das zugehörige lineare Gleichungssystem ebenso viele Gleichungen wie Unbekannte.

Die formale, mathematisch präzise Definition der Determinante ist sehr aufwändig, insbesondere der Nachweis der Existenz einer solchen. Darauf verzichten wir und geben stattdessen Regeln, mit denen die Determinante in allen Anwendungen bestimmt werden kann.

Rechenregel 5.8 (Determinante einer oberen Dreiecksmatrix). Die quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ liege in Zeilenstufenform (5.6) vor, d.h. ihre Einträge unterhalb der Diagonalen sind sämtlich Null, kurz: $a_{ij} = 0$, falls $i > j$. A heißt dann obere Dreiecksmatrix. Die Determinante einer solchen Matrix ist das Produkt sämtlicher Einträge auf der Diagonalen, also

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Ein oder mehrere Diagonaleinträge können auch gleich Null sein, dann gilt $\det(A) = 0$.

Die Determinante einer Matrix ist somit eine Zahl.

Wir haben nun festgelegt, was die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist. Aber wie ergibt sich die Determinante einer beliebigen Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, die keine obere Dreiecksmatrix ist? Hier hilft wieder der mächtige Satz 5.6:

Rechenregel 5.9 (Determinante einer beliebigen quadratischen Matrix). Sei $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Gemäß Satz 5.6 kann B durch Operationen vom Typ I und II in eine obere Dreiecksmatrix A überführt werden. Dazu seien $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$ Operationen vom Typ II (Zeilenvertauschungen) erforderlich. Dann gilt

$$\det(B) = (-1)^k \det(A). \quad (5.8)$$

Beispiel 5.10. Wir wollen die Determinante der folgenden Matrix $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ bestimmen:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dazu formen wir schrittweise um in obere Dreiecksgestalt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \begin{matrix} \cdot (-2) \\ + \\ \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Dabei wurde eine Zeilenvertauschung durchgeführt. Gemäß (5.8) gilt also

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^1 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = (-1) (2 \cdot (-4) \cdot 5) = 40. \quad \blacktriangleright$$

Wir halten eine Eigenschaft der Determinante fest: Für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B). \quad (5.9)$$

Die Determinante einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat in Bezug auf den Rang einer Matrix bzw. die Struktur der Lösungsmenge $\mathbb{L}(A; \mathbf{b})$ folgende Bedeutung:

Satz 5.11. *Vorgelegt ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Es gelten die folgenden Äquivalenzen:*

$$\det(A) \neq 0 \iff A \text{ hat Rang } n \iff A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ besitzt genau eine Lösung.}$$

Die zweite Äquivalenz hatten wir schon in [Bemerkung 5.4](#) festgehalten. Die erste Äquivalenz folgt unmittelbar aus den beiden Rechenregeln [5.8](#) und [5.9](#).

Für Matrizen der Größe 2×2 und 3×3 gibt es die *Regel von Sarrus*⁴ (bzw. den *Jägerzaun-Trick*):

Rechenregel 5.12 (Regel von Sarrus).

(i) Sei $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Dann gilt

$$\det B = \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = b_{11} \cdot b_{22} - b_{12} \cdot b_{21}.$$

(ii) Sei $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \det B &= \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \\ &= b_{11} \cdot b_{22} \cdot b_{33} + b_{12} \cdot b_{23} \cdot b_{31} + b_{13} \cdot b_{21} \cdot b_{32} \\ &\quad - b_{13} \cdot b_{22} \cdot b_{31} - b_{12} \cdot b_{21} \cdot b_{33} - b_{11} \cdot b_{23} \cdot b_{32}. \end{aligned}$$

Für größere Matrizen gibt es kein vergleichbar einfaches Rechenschema zur Berechnung der Determinante.

Wir können damit unsere Rechnung aus [Beispiel 5.10](#) verifizieren:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 0 + 3 \cdot 5 \cdot 4 + 0 - 0 - 0 - 5 \cdot 2 \cdot 2 = 40.$$

⁴Benannt nach dem franz. Mathematiker PIERRE FRÉDÉRIC SARRUS (1798–1861)

5.4 Die inverse Matrix

Eine quadratische Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt *invertierbar*, falls es eine *inverse Matrix* B^{-1} mit der folgenden Eigenschaft gibt:

$$B \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix rechts (mit Einsen auf der Diagonalen und sonst Nullen) heißt *Einheitsmatrix* (der Größe n) und wird mit E_n bezeichnet. Mit Hilfe der Determinante können wir eine Matrix auf ihre Invertierbarkeit prüfen. Es gilt

Satz 5.13. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$.

Rechnerisch ermittelt man die Inverse einer Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, indem man sie zusammen mit der Einheitsmatrix E_n in ein Schema schreibt und solange mit Operationen vom Typ I-III umformt, bis aus B die Einheitsmatrix hervorgegangen ist.

Wir demonstrieren das hier mit der Matrix $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ aus [Beispiel 5.10](#), die wegen $\det(B) = 40$ invertierbar ist:

Beispiel 5.14.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\leftarrow} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\leftarrow} \cdot (-2) \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\leftarrow} \cdot \frac{-1}{4} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\leftarrow} \cdot (-3) \xrightarrow{\leftarrow} \cdot \frac{-1}{2} \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\leftarrow} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\leftarrow} \cdot \frac{1}{2} \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Es gilt also

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleright$$

Die inverse Matrix ist z.B. dann nützlich, wenn man ein lineares Gleichungssystem $(A|\mathbf{b})$, das eindeutig lösbar ist, für verschiedene rechte Seiten \mathbf{b} lösen will. Die Lösung ergibt sich nämlich dann durch

$$\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \mathbf{b}, \quad \text{denn } A \cdot (A^{-1} \cdot \mathbf{b}) = E_n \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

Es genügt also, den Gauß-Algorithmus ein Mal auszuführen, um die Inverse zu bestimmen. Die Lösungen ergeben sich dann durch einfache Matrix-Vektor-Multiplikationen.

5.5 Lineare Entwicklungsmodelle in diskreter Zeit

Wir wollen in diesem Abschnitt Entwicklungsmodelle studieren und das Konzept der Eigenwerte bzw. Eigenvektoren einführen um stabile Zustände von Systemen zu ermitteln.

5.5.1 Übergangsmatrizen

Wir gehen von einem Migrationsmodell aus, worin sich eine Population auf n verschiedene Siedlungsgebiete verteilt.

Eine quadratische Matrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Einträgen p_{ij} heißt *Übergangsmatrix*, falls $p_{ij} \in [0, 1]$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ und falls

$$\sum_{i=1}^n p_{ij} = 1 \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n. \quad (5.10)$$

Diese Gleichung besagt, dass in jeder Spalte der Matrix die Summe aller Einträge genau 1 sein muss. In Anwendungen kann man die Einträge $p_{ij} \in [0, 1]$ meist als Anteile interpretieren. So auch im folgenden Beispiel:

Beispiel 14 (Population von Seevögeln, vgl. [BJK07, Bsp. 9.23]). Wir betrachten eine Population von Seevögeln, deren Siedlungsgebiete sich über n Inseln erstrecken. Diese Seevögel behalten allerdings nicht ihr Leben lang ihre jeweiligen Siedlungsgebiete, sondern wechseln die Gebiete im Laufe der Zeit. Innerhalb einer gewissen Zeitspanne Δt findet also eine Migration zwischen den Inseln statt. Empirisch – etwa durch Markierung – kann man dann feststellen, wie groß der Anteil der Vögel ist, welche die Insel während Δt gewechselt haben und welcher Anteil geblieben ist.

In der Sprache der Übergangsmatrizen bedeutet dies, dass p_{ij} gemessen wird; der Anteil der Seevögel auf Insel j , die im Zeitraum Δt auf Insel i umgezogen sind. Dabei bedeutet $p_{jj} > 0$, dass ein Anteil der Vögel auch auf Insel j verblieben ist. In diesem Kontext ist die Bedingung (5.10) völlig natürlich.

Das Migrationsverhalten dieser Population in Zeitschritten Δt wird durch die Übergangsmatrix P vollständig beschrieben:

Bezeichnen wir mit x_i die Anzahl der Individuen, die sich in Gebiet i befinden und mit x_i^* die Anzahl der Individuen, die sich nach dem Zeitschritt Δt in diesem Siedlungsgebiet befinden, dann gilt

$$x_i^* = \sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \quad \text{für jedes } i = 1, \dots, n,$$

oder in der aus Kapitel 5 bekannten Schreibweise

$$\mathbf{x}^* = P \cdot \mathbf{x}.$$

Entsprechend gilt für den Vektor \mathbf{x}^{**} , der die Anzahl der Individuen nach zwei Zeitschritten angibt,

$$\mathbf{x}^{**} = P \cdot \mathbf{x}^* = P \cdot (P \cdot \mathbf{x}) = P^2 \mathbf{x}.$$

Allgemein gibt die m -te Potenz von P also die Überganganteile nach m Zeitschritten an, wobei $m \in \mathbb{N}$.

Beispiel 5.15. Wir bleiben beim Beispiel der Population von Seevögeln, die sich auf $n = 2$ Inseln verteilt. Es wurde folgende Übergangsmatrix gemessen:

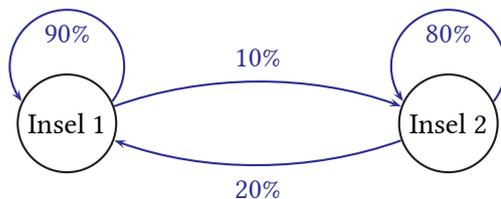
$$P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} x_1^* &= 0,9 x_1 + 0,2 x_2, \\ x_2^* &= 0,1 x_1 + 0,8 x_2. \end{aligned}$$

Also bleiben 90 % der Vögel auf Insel 1 und 80 % der Vögel auf Insel 2. 10 % der Vögel auf Insel 1 und 20 % der Vögel auf Insel 2 ziehen um. ►

Ein solches Migrationsverhalten lässt sich auch durch einen gerichteten Graphen veranschaulichen:



Grafik 5.2: Gerichteter Graph zum Migrationsverhalten aus Beispiel 5.15.

5.5.2 Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen

Ökologisch interessant ist nun die Frage nach stabilen Zuständen eines solchen Systems, das durch die Übergangsmatrix $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine Anfangsverteilung $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ beschrieben wird. Dabei heißt ein Zustand $\xi \in \mathbb{R}^n$ *stabil*, wenn

$$P \cdot \xi = \xi. \quad (5.11)$$

In diesem Fall gilt dann auch $P^m \cdot \xi = \xi$ für alle $m \in \mathbb{N}$, das System befindet sich also in einem dynamischen Gleichgewicht.

Diese Fragestellung führt zu folgendem mathematischen Konzept:

Definition 5.16. Sei A eine $(n \times n)$ -Matrix. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt *Eigenwert* von A , wenn es einen Vektor $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ gibt mit

$$A \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}. \quad (5.12)$$

Der Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ heißt dann *Eigenvektor* zum Eigenwert λ .

Die stabilen Zustände eines Systems sind also genau die Eigenvektoren zum Eigenwert 1 von P .

Wir halten zunächst fest, dass mit einem Eigenvektor \mathbf{x} von A zum Eigenwert λ auch jedes Vielfache $\mathbf{z} = c\mathbf{x}$ mit $c \neq 0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist: Es gilt nämlich

$$A \cdot \mathbf{z} = cA \cdot \mathbf{x} = c\lambda \mathbf{x} = \lambda \mathbf{z}.$$

Bei der Suche nach Eigenwerten (und später Eigenvektoren) einer gegebenen Matrix A haben wir uns also mit der Frage zu beschäftigen, wann es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, sodass die Gleichung

$$A \cdot \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \iff A \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x} \iff A \cdot \mathbf{x} = \lambda E_n \cdot \mathbf{x}$$

mehr als eine Lösung besitzt. Diese Gleichung können wir durch Subtraktion von $\lambda E_n \cdot \mathbf{x}$ in eine uns wohlbekannte Form bringen:

$$A \cdot \mathbf{x} - \lambda E_n \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

oder äquivalent

$$(A - \lambda E_n) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (5.13)$$

Bei (5.13) handelt es sich um ein lineares Gleichungssystem mit rechter Seite $\mathbf{0}$. Ein solches LGS nennt man *homogen*. Da $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ offensichtlich eine Lösung ist, besitzt das Gleichungssystem (5.13) mindestens eine Lösung.

Um zu klären, ob λ ein Eigenwert von A ist, müssen also nur noch diejenigen $\lambda \in \mathbb{R}$ bestimmt werden, sodass (5.13) mehr als nur die triviale Lösung – und damit dann unendlich viele Lösungen – besitzt. Hier erinnern wir uns an [Satz 5.11](#) und erhalten:

Satz 5.17. $\lambda \in \mathbb{R}$ ist genau dann ein Eigenwert von A , wenn $\det(A - \lambda E_n) = 0$. Die Menge aller Eigenvektoren zu einem Eigenwert λ ist dann durch alle von Null verschiedenen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda E_n) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

gegeben.

Wir greifen [Beispiel 5.15](#) auf:

Beispiel 5.18. Sei $P = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$ wie oben.

Schritt 1: Bestimmung der Eigenwerte von P : Es gilt

$$P - \lambda E_2 = \begin{pmatrix} 0,9 - \lambda & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 - \lambda \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$\det(P - \lambda E_2) = (0,9 - \lambda)(0,8 - \lambda) - 0,02 = \lambda^2 - 1,7\lambda + 0,7. \quad (5.14)$$

Es folgt daraus

$$\det(P - \lambda E_2) = 0 \iff \lambda = 1 \text{ oder } \lambda = 0,7.$$

Tatsächlich ist also 1 ein Eigenwert von P und es gibt im Sinne von (5.11) stabile Verteilungen – vorausgesetzt, dass die zugehörigen Eigenvektoren eine sinnvolle Interpretation haben.

Wir bestimmen die Menge der Eigenvektoren im nächsten Schritt:

Schritt 2: Bestimmung der Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$: Wir suchen die Lösungsmenge des LGS $(P - E_2) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$: Wir wissen bereits, dass sich im Gauß-Verfahren mindestens eine Nullzeile ergeben wird, weshalb $x_2 = t$ gewählt werden kann und x_1 sich aus Zeile 1 ergibt:

$$-0,1x_1 + 0,2t = 0 \iff x_1 = 2t.$$

Die Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ ist also gegeben durch

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Alle Verteilungen, bei denen sich auf Insel 1 doppelt so viele Vögel aufhalten wie auf Insel 2, sind also stabil im Sinne von (5.11).

Der Vollständigkeit halber bestimmen wir noch die Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 0,7$:

Schritt 3: Analog zum Verfahren in Schritt 2 ergibt sich nach Setzung von $x_2 = t$ die Gleichung

$$0,2x_1 + 0,2t = 0 \iff x_1 = -t.$$

Die Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_2 = 0,7$ ist also gegeben durch

$$\left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{x} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}. \quad \blacktriangleright$$

Bemerkung 5.19.

- Die Frage nach Eigenwerten von Matrizen, die keine Übergangsmatrizen sind, ist mindestens genauso interessant. Nur fehlt dann der Zusammenhang zu Gleichgewichtszuständen einer Population, den wir hier als Motivation gewählt haben.
- Das in Satz 5.17 gegebene Kriterium zum Bestimmen der Eigenwerte gilt für Matrizen beliebiger Größe. Wir haben uns nur im Beispiel auf die Größe 2×2 beschränkt.
- Für Matrizen A der Größe $n \times n$ ist $\det(A - \lambda E_n)$ ein Polynom vom Grad n . Dieses Polynom wird *charakteristisches Polynom* von A genannt. In Beispiel 5.18 war dies das Polynom vom Grad 2 in (5.14).
Wir haben in dieser Vorlesung nur Techniken kennengelernt, um Nullstellen von Polynomen vom Grad 2 algebraisch zu bestimmen. Für Polynome höheren Grades wird die ganze Angelegenheit ziemlich komplex. Es gibt zwar (unhandliche) Formeln für die Lösungen von Polynomen vom Grad 3 und 4, aber schon ab $n \geq 5$ gibt es solche Lösungsformeln nachweislich⁵ nicht.
- Die Frage, ob eine Matrix mit ausschließlich reellen Einträgen überhaupt reelle Eigenwerte besitzt, ist ebenfalls nicht einfach zu beantworten. Z.B. gilt

$$\det \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda E_2 \right) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Dieses Polynom besitzt keine reelle Nullstelle. Man kann beweisen, dass die charakteristischen Polynome von symmetrischen⁶ Matrizen der Größe $n \times n$ stets n (evtl. mehrfache) Nullstellen besitzen.

⁵Dies ist die Aussage des Satzes von Abel-Ruffini.

⁶Eine Matrix A heißt symmetrisch, wenn $a_{ij} = a_{ji}$ für alle i, j .

6 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Gleichungen, in denen der gesuchte Ausdruck eine Funktion ist. Genauer, befassen wir uns mit sogenannten Differentialgleichungen, in denen die gesuchte Funktion in Beziehung zu ihrer Ableitung gesetzt wird. Unser Ziel ist es Lösungen für solche Gleichungen zu finden. Differentialgleichungen sind ein wichtiges Werkzeug in der mathematischen Modellierung vieler Naturgesetze, wie z.B. Wachstumsprozesse, Bewegungsgleichungen oder auch Prozesse in der Evolutionstheorie.

Wir beschränken uns im Rahmen dieser Vorlesung auf Gleichungen, in denen die gesuchte Funktion, ihre Variablen und Ableitungen erster Ordnung vorkommen. Solche Gleichungen nennen wir Differentialgleichungen (DGL) erster Ordnung¹. Formal ist eine Differentialgleichung erster Ordnung eine Gleichung der Form

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in I,$$

wobei I ein offenes Intervall und f eine reellwertige Funktion in der Funktion y und der Variable x ist.

Definition 6.1. Sei I ein offenes Intervall. Betrachtet werde eine Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in I. \tag{6.1}$$

Eine differenzierbare Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Lösung der Differentialgleichung (6.1), falls sie (6.1) erfüllt. Die Funktion f ist dabei eine Funktion, die auf dem kartesischen Produkt $I \times \mathbb{R}$ definiert ist. Sie bildet nach \mathbb{R} ab und wird manchmal als *rechte Seite* der Differentialgleichung bezeichnet.

Oftmals ist noch eine zusätzliche Vorgabe einer Anfangsbedingung der Form $y(x_0) = y_0$ mit $x_0 \in I$ und y_0 vorgegeben. Dann heißt eine Funktion y Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)), & x \in I, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

wenn $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung ist und zusätzlich den Anfangswert $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}$ erfüllt.

So ist zum Beispiel in der Differentialgleichung $y'(x) = 4$ für alle $x \in \mathbb{R}$ eine Funktion $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gesucht mit der Eigenschaft, dass ihre Ableitung in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ gleich 4 ist. Also eine Funktion mit Steigung 4 in jedem Punkt und damit eine lineare Funktion. Beispiele für Lösungen der Gleichung sind $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y(x) = 4x$ oder $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y(x) = 4x + 2$.

¹Die höchste vorkommende Ableitungsordnung wird Ordnung der Differentialgleichung genannt.

Wir wollen zunächst Differentialgleichungen untersuchen, in denen die rechte Seite nur von y selbst abhängt, genauer $f(x, y(x)) = y(x)$. Wir betrachten also die DGL

$$y'(x) = y(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \quad (6.2)$$

Gesucht ist also eine Funktion $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft (6.2).

Wir verwenden die Kurzschreibweise für Differentialgleichungen und schreiben häufig einfach y anstatt $y(x)$ oder $y(t)$ für den Funktionsterm. Somit ist

$$y' = y$$

die Kurzschreibweise von (6.2). In Kapitel 3 haben wir gesehen, dass die Funktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diejenige Exponentialfunktion ist, die die Eigenschaft $\exp'(x) = \exp(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ hat. Somit ist $y(x) = \exp(x)$ ein Beispiel einer Lösung dieser Differentialgleichung. Die Multiplikation der Funktion \exp mit einer Konstanten $\eta \in \mathbb{R}$ liefert ebenfalls eine Lösung. Somit sind Lösungen der Differentialgleichung (6.2) gegeben durch

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) = \eta \exp(x),$$

wobei $\eta \in \mathbb{R}$.

Wir verwenden die Differentialgleichung (6.2) um eine allgemeinere Differentialgleichung zu formulieren, dessen Lösung einen exponentiellen Wachstumsprozess beschreibt. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Wachstumskonstante bzw. Zerfallskonstante. Wir untersuchen die Differentialgleichung

$$y' = \lambda y. \quad (6.3)$$

Funktionen der Form $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$y(x) = \eta \exp(\lambda x) \quad (6.4)$$

lösen (6.3) für beliebiges $\eta \in \mathbb{R}$, da

$$y'(x) = \eta \lambda \exp(\lambda x) = \lambda y(x).$$

In der Tat sind durch das oben definierte y alle Lösungen der Differentialgleichung (6.3) definiert. Der Parameter $\eta \in \mathbb{R}$ kann frei gewählt werden und wird durch zusätzliche Anfangsbedingungen an die Gleichung festgelegt. Gleichung (6.3) beschreibt ein Wachstumsmodell bei dem die Änderungsrate $y'(x)$ zum Zeitpunkt x proportional zum aktuellen Bestand $y(x)$ ist. Diese Interpretation ist nur für $x \geq 0$ sinnvoll, da x die vergangene Zeit seit Beobachtungsbeginn beschreibt.

Beispiel 15 (Vermehrung von Fruchtfliegen, vgl. [ESS14, Beispiel 7.1]).

Fruchtfliegen vermehren sich im Sommer unter idealen Bedingungen besonders schnell. Für das Wachstumsverhalten der Fruchtfliegen gilt

$$y'(t) = \frac{3}{2}y(t) \quad \text{für } t \geq 0. \quad (6.5)$$

Hierbei bezeichnet $y(t)$ die Anzahl der Fruchtfliegen nach t Tagen. Zu Beobachtungsbeginn werden 20 Fruchtfliegen gezählt.

Wenn wir die Anfangsbedingung $y(0) = 20$ außer Acht lassen, so wird die Differentialgleichung (6.5), wie bei (6.3), durch

$$y(t) = \eta \exp\left(\frac{3}{2}t\right)$$

für alle $t \geq 0$ gelöst. Wir bestimmen nun das $\eta \in \mathbb{R}$, indem wir die Anfangsbedingung $y(0) = 20$ noch zusätzlich berücksichtigen. Es gilt

$$y(0) = 20 \iff \eta \exp\left(\frac{3}{2} \cdot 0\right) = 20 \iff \eta = 20.$$

Somit ist $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$y(t) = 20 \exp\left(\frac{3}{2}t\right)$$

die Lösung der Gleichung (6.5) mit Anfangsbedingung $y(0) = 20$.

6.1 Trennung der Veränderlichen

In diesem Abschnitt wollen wir uns etwas komplexeren Differentialgleichungen widmen und eine Methode kennenlernen, die es uns erlaubt Lösungen von solchen DGL zu ermitteln. Wir untersuchen Differentialgleichungen der Form

$$y'(x) = g(y(x)) \cdot h(x), \quad x \in I \quad (6.6)$$

wobei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare² Funktionen sind. Eine DGL der Form (6.6) wird *trennbare DGL* genannt. Dieser Name begründet sich durch die im Folgenden beschriebene Lösungsstrategie von (6.6).

Wir bringen alle Termine, in denen ein $y(x)$ vorkommt auf eine Seite der Gleichung und alle anderen Terme auf die andere Seite der Gleichung (wir *Trennen also die Variablen*). Dies führt zu

$$y'(x) = g(y(x))h(x) \iff \frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x), \quad (6.7)$$

wobei wir vorausgesetzt haben, dass die Funktion g ungleich Null ist. Sei $x_0 \in I$ ein vorgegebener Anfangswert mit $y(x_0) = y_0 \neq 0$. Da (6.7) für jedes $x \in I$ gilt, können wir

²Die schwächere Eigenschaft Stetigkeit anstelle von Differenzierbarkeit ist ausreichend. Aber diesen Begriff haben wir im Rahmen dieser Vorlesung nicht eingeführt.

die resultierende DGL integrieren. Wir erhalten

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(s)}{g(y(s))} ds = \int_{x_0}^x h(s) ds. \quad (6.8)$$

Mithilfe der Substitutionsregel schließen wir

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(x)}{g(y(x))} ds = \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{1}{g(s)} ds.$$

Deshalb vereinfacht sich (6.8) zu

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{1}{g(s)} ds = \int_{x_0}^x h(s) ds. \quad (6.9)$$

Rechnet man die Integrale in der obigen Gleichung aus und löst nach $y(x)$ auf, so erhält man die Lösung des zur Differentialgleichung (6.6) gehörigen Anfangswertproblems. Sind keine expliziten Werte für x_0 und $y(x_0)$ vorgegeben, so erhält man eine Lösung von (6.6) indem man mit beliebigen Werten für x_0 und $y(x_0)$ rechnet. In diesem Fall können wir natürlich nicht erwarten, dass die Lösung der DGL eindeutig ist.

Wir demonstrieren an zwei Beispielen wie die Lösung einer Differentialgleichung der Form (6.6) mit (6.9) gelöst werden kann.

Beispiel 6.2.

(i) Wir untersuchen die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y}{x} \quad \text{für } x > 0$$

mit der Zusatzbedingung $y(1) = 1$. Dies eine Differentialgleichung der Form (6.6) mit $h(x) = \frac{-1}{x}$ und $g(y) = y$. Es gilt also für alle $x \geq 1$

$$\int_1^{y(x)} \frac{1}{s} ds = \int_1^x \frac{-1}{s} ds.$$

Wir rechnen die beiden Integrale aus. Es gilt

$$\int_1^{y(x)} \frac{1}{s} ds = \ln |y(x)| \quad \text{und} \quad \int_1^x \frac{-1}{s} ds = -\ln(x),$$

da $x > 0$. Also

$$\begin{aligned} \int_1^{y(x)} \frac{1}{s} ds = \int_0^x \frac{-1}{s} ds &\iff \ln |y(x)| = -\ln x \\ &\iff |y(x)| = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Da $y(1) = 1$ und y eine differenzierbare Funktion ist, ist die letzte Gleichung äquivalent zu $y(x) = \frac{1}{x}$.

Somit löst $y : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $y(x) = \frac{1}{x}$ die Differentialgleichung mit der gewünschten Bedingung.

(ii) Wir untersuchen die Differentialgleichung

$$y' = xy^2 + x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

mit der Zusatzbedingung $y(0) = 1$. Es gilt $y' = xy^2 + x = x(1 + y^2)$. Also ist dies eine Differentialgleichung der Form (6.6) mit $h(x) = x$ und $g(y) = (1 + y^2) \neq 0$. Es gilt also für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\int_1^{y(x)} \frac{1}{1+s^2} ds = \int_0^x s ds.$$

Wir rechnen die beiden Integrale nun aus. Es gilt

$$\int_1^{y(x)} \frac{1}{1+s^2} ds = \arctan y(x) - \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad \int_0^x s ds = \frac{1}{2}x^2.$$

Also

$$\begin{aligned} \int_1^{y(x)} \frac{1}{1+s^2} ds = \int_0^x s ds &\iff \arctan y(x) - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}x^2 \\ &\iff y(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}\right), \end{aligned}$$

wobei die Äquivalenzen nur dann gelten, wenn $\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, d.h., wenn

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4} &< \frac{\pi}{2} \\ &\iff |x| < \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Dies liegt daran, dass der Definitionsbereich des Tangens auf das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ eingeschränkt werden muss, um eine bijektive Funktion zu erhalten. Somit löst

$$y : \left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) = \tan\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}\right)$$

die Differentialgleichung mit der gewünschten Anfangsbedingung. Natürlich können hier auch andere Definitionsintervalle der Lösungen erreicht werden, wenn der entsprechende Ast des Tangens abgeändert wird. Dann läge der Anfangswert $x = 0$ aber nicht mehr im Definitionsintervall von y .



Es ist immer sinnvoll eine *Probe* zu machen, nachdem man eine Lösung berechnet hat. Wir führen dies beispielhaft für Beispiel 5.2 (ii) vor. Hier gilt

$$\begin{aligned} y'(x) &= \tan' \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4} \right) \cdot x \\ &= \left[1 + \tan^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{4} \right) \right] \cdot x \\ &= (1 + y(x)) \cdot x. \end{aligned}$$

Außerdem $y(0) = \tan \left(\frac{\pi}{4} \right) = 1$.

6.2 Lineare Entwicklungsmodelle in stetiger Zeit

Wir betrachten nun die zeitliche Entwicklung von zwei Größen in stetiger Zeit. Dabei können wir an das Wachstum zweier Populationen denken.

Wir betrachten also zwei Funktionen $x : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ und $y : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Die Größen $x(t)$ und $y(t)$ bezeichnen die Größe der jeweiligen Population zum Zeitpunkt t . Oftmals bietet es sich an, beide Größen zusammen zu betrachten. Man kann den Zustand des gesamten Systems zum Zeitpunkt t dann als Vektor

$$\mathbf{w}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

auffassen.

Wir nehmen nun an, dass die Änderungsraten (die Ableitung des Zustands nach der Zeit) der beiden Populationen linear von den Zuständen beider Populationen abhängen. Genauer gesagt, wir nehmen an, dass es Zahlen $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1$ und b_2 gibt, so dass für jedes $t > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} x'(t) &= a_{11}x(t) + a_{12}y(t) + b_1, \\ y'(t) &= a_{21}x(t) + a_{22}y(t) + b_2. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Wenn wir nun eine Matrix \mathbf{A} und einen Vektor \mathbf{b} wie folgt einführen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

so können wir das System (6.10) auch kürzer so schreiben:

$$\mathbf{w}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{w}(t) + \mathbf{b}. \tag{6.11}$$

Im Fall $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ nennt man das System (6.10) ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung. Bemerkenswert ist nun, dass man seine Lösung ganz ähnlich zum bekannten skalaren Fall einer Gleichung finden kann:

Satz 6.3 (homogener Fall, $b = 0$). Wenn die Matrix \mathbf{A} zwei verschiedene reelle Eigenwerte λ_1 und λ_2 mit den Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ hat, so besitzt das Gleichungssystem (6.10) die beiden Lösungen

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_1(t) &= e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1, \\ \mathbf{w}_2(t) &= e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2.\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge aller Lösungen besteht nun aus den Funktionen der Form

$$\mathbf{w}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2,$$

wobei die Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden können.

Der Satz zeigt uns im Fall $b = 0$, wie die Lösungen aussehen. Sehr oft interessiert man sich aber nur für Lösungen, die eine bestimmte Anfangsbedingung erfüllen, also zum Beispiel $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ für vorgegebene Startwerte x_0, y_0 . Wenn man diese Bedingungen garantieren will, so muss man c_1 und c_2 entsprechend wählen.

Wir schauen uns ein Beispiel an.

Beispiel 6.4. Seien $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Gesucht ist in diesem Fall die allgemeine Lösung von (6.10). Wir berechnen nun die Eigenwerte und Eigenvektoren. Es gibt zwei verschiedene Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -3$. Der Eigenvektor zu λ_1 ist $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und der Eigenvektor zu λ_2 ist $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Damit ergibt sich die allgemeine Lösung durch

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t},$$

bzw.

$$\begin{aligned}x(t) &= -c_1 e^{-t} - c_2 e^{-3t} \\ y(t) &= -c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t},\end{aligned}$$

wobei die Zahlen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt werden können. ▶

Durch die Wahl der Konstanten c_1 und c_2 kann wie im skalaren Fall eine Lösung einer Differentialgleichung mit Anfangsbedingungen bestimmt werden.

Nehmen wir in [Beispiel 6.4](#) zusätzlich an, dass $\mathbf{w}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gelten soll. Dann löst

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-3t} \\ y(t) &= \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t},\end{aligned}$$

die obige Differentialgleichung mit Anfangsdaten $x(0) = 1$ und $y(0) = 0$.

6.3 Das Lotka-Volterra'sche Räuber-Beute-Modell

Im vorherigen Abschnitt haben wir gesehen, dass die zeitliche Entwicklung zweier wechselwirkender Größen naturgemäß auf Systeme von Differentialgleichungen zurückführt. In diesem Abschnitt wollen wir ein Räuber-Beute-System modellieren. In den 1920ern untersuchte der italienische Biologe Umberto D'Ancona (1896 - 1964) die zeitliche Entwicklung der Fischpopulation in der adriatischen See. Hierbei unterschied er zwischen Beute-Fischen (Sardinen) und Räuber-Fischen (Haien). Umberto D'Ancona beobachtete, dass durch die Reduzierung des Fischfangs die Räuberpopulation anstieg, die Beutepopulation aber abnahm. Er wandte sich erklärungssuchend an den Mathematiker Vito Volterra (1860-1940), welcher ein mathematisches Modell entwickelte um die Entwicklung der beiden Fischpopulationen möglichst realitätsnah zu beschreiben. Unabhängig davon entwickelte der österreichisch-amerikanische Chemiker Alfred J. Lotka (1880- 1949) die theoretische Beschreibung solcher Räuber-Beute-Modelle für die Populationsdynamik von Hasen und Luchsen in Kanada.

Wir betrachten im Folgenden also ein Modell bestehend aus zwei Tierarten, wobei die eine Tierart den natürlichen Fressfeind (**Beute**) der anderen Tierart (**Räuber**) darstellt

Wir werden im Folgenden einige Annahmen an das Modell stellen:

- die Räuber ernähren sich ausschließlich von den Beutetieren,
- die Beutepopulation hat außer der betrachteten Räuberpopulation keine weiteren Feinde,
- die Beutepopulation verfügt über ein unbegrenztes Nahrungsangebot.

Es seien

$$\begin{aligned} b &= b(t) = \text{der Umfang der Beutepopulation zur Zeit } t, \\ r &= r(t) = \text{der Umfang der Räuberpopulation zur Zeit } t. \end{aligned}$$

Angenommen es gebe keine Wechselwirkung zwischen den beiden Populationen. Im diesem Fall hätten die Beutetiere keine Fressfeinde. Aufgrund des unbegrenzten Nahrungsangebotes würde sich die Beutepopulation nach dem Gesetz

$$b' = \alpha b \tag{6.12}$$

mit einer gewissen positiven Konstante α entwickeln. Somit würde sich die Beutepopulation, ohne Räuber, gemäß $b(t) = b(0) \exp(\alpha t)$ exponentiell vermehren.

Die Räuberpopulation hätte im Falle fehlender Wechselwirkung keine Nahrung. und würde sich nach dem Gesetz

$$r' = -\beta r \tag{6.13}$$

mit einer gewissen positiven Konstante β entwickeln. Somit würde die Räuberpopulation gemäß $r(t) = r(0) \exp(-\beta t)$ exponentiell zerfallen.

Im Folgenden betrachten wir ein gekoppeltes System, d.h. ein System mit Wechselwirkung zwischen den Populationen. Die Wachstumsgeschwindigkeit der Beutepopulation b' verringert sich durch den Abfang durch die Räuber. Die Anzahl der Aufeinandertreffen

zwischen Räuber und Beute kann im einfachsten Fall als proportional zu br angenommen werden. Folglich muss in (6.12) der Term γbr mit einem $\gamma > 0$ subtrahiert werden, also

$$b' = \alpha b - \gamma br. \quad (6.14)$$

Während der Term αb den Zuwachs der Beutepopulation zum Zeitpunkt t beschreibt, gibt γbr die Dezimierung der Beute durch den Räuber an.

Analog führt bei der Räuberpopulation der Abfang und das Fressen der Beutetiere zu einem Zuwachs der Wachstumsgeschwindigkeit r' . Dieser Zuwachs kann durch eine Addition des Termes δbr für ein $\delta > 0$ in (6.13) repräsentiert werden. Also

$$r' = -\beta r + \delta br. \quad (6.15)$$

Hier gibt βr die Dezimierung der Räuberpopulation durch Nahrungsmangel an und δrb den Zuwachs der Räuberpopulation durch Beutefang.

Das entstandene Modell

$$\begin{aligned} b' &= \alpha b - \gamma br, \\ r' &= -\beta r + \delta rb \end{aligned} \quad (6.16)$$

ist ein System von zwei gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung³ und ist bekannt als das *Lotka-Volterra'sche Räuber-Beute-Modell*.

Hierbei können die Konstanten α, β, γ und δ wie folgt interpretiert werden

- α =Fruchtbarkeitsrate,
- β =spezifischer Nahrungsbedarf der Räuber,
- γ =Jagdgeschick,
- δ =Beuteverwertung.

In dem System (6.16) kommt die Zeit t lediglich in den Funktionen b und r und in deren Ableitungen vor. Folglich kann das System (6.16) für $F(b, r) = \alpha b - \gamma br$ und $G(b, r) = -\beta r + \delta rb$ in die Form

$$\begin{aligned} b' &= F(b, r), \\ r' &= G(b, r) \end{aligned} \quad (6.17)$$

gebracht werden, wobei F und G lediglich von b und r abhängen und t nicht explizit erscheint. Solch ein System nennen wir *autonom*.

Wir definieren nun, was wir unter einer Lösung eines Differentialgleichungssystems verstehen:

Definition 6.5. Sei I ein offenes Intervall. Betrachtet werde das folgende System von Differentialgleichungen auf I :

$$\begin{aligned} b' &= F(b, r), \\ r' &= G(b, r). \end{aligned}$$

- (i) Eine Lösung des Systems ist ein Paar $(b(t), r(t))$ von differenzierbaren Funktionen $b(t)$ und $r(t)$, die die zwei obigen Gleichungen für alle $t \in I$ erfüllen.

³Ein System von Differentialgleichungen mit höchstens Ableitungen erster Ordnung

- (ii) Seien noch zusätzliche Vorgaben einer Anfangsbedingung der Form $b(t_0) = b_0$ und $r(t_0) = r_0$ gegeben. Dann heißt eine Lösung $(b(t), r(t))$ des Systems Lösung des Anfangswertproblems, wenn zusätzlich $t_0 \in I$, $b(t_0) = b_0$ und $r(t_0) = r_0$ gelten.

Der Grund für die Bevorzugung von autonomen Differentialgleichungssystemen ist die Invarianz der Lösungen im folgenden Sinn:

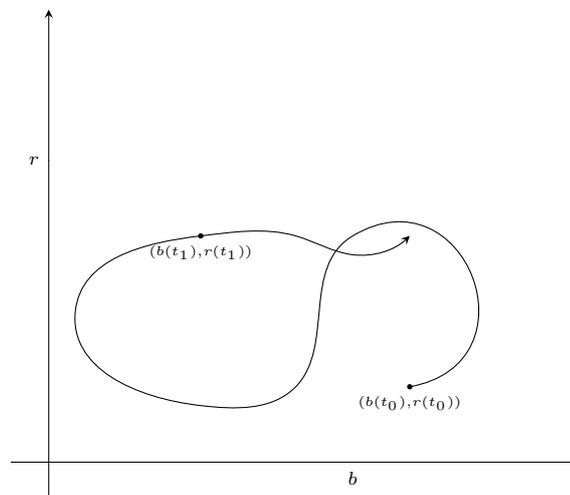
Satz 6.6. Sei $(b(t), r(t))$ eine Lösung von (6.17), so ist für jedes feste $s \in \mathbb{R}$ auch $(\tilde{b}(t), \tilde{r}(t)) = (b(t+s), r(t+s))$ eine Lösung des Systems.

Dies bedeutet, dass der Prozessverlauf nur von dem Anfangszustand abhängt und nicht von dem Zeitpunkt, zu dem der Prozess startet.

Die Lösungen eines solchen Differentialgleichungssystem sind eigentlich in einem dreidimensionalen Koordinatensystem mit $(t, b(t), r(t))$ zu veranschaulichen. Jedoch erhält man die wesentlichen Informationen, indem man $t \mapsto (b(t), r(t))$ in ein zweidimensionales Koordinatensystem, dem sogenannten *Phasenraum*, aufträgt.

Definition 6.7. Die Gesamtheit aller Lösungskurven $t \mapsto (b(t), r(t))$ von (6.17) in dem Phasenraum bezeichnen wir als *Phasenportrait* des Systems.

Die Kurven werden *Trajektorien* oder *Orbits* des Systems genannt.



Grafik 6.1: Beispiel einer Trajektorie

Für das Lotka-Volterra-Modell kennt man keine expliziten Lösungen $t \mapsto b(t)$ und $t \mapsto r(t)$ des Systems. Dennoch kann man sich ein vollständiges Bild über diese Lösungen machen.

Wie in der obigen Abbildung der Trajektorie ersichtlich ist, kann die Trajektorie in Teilstücken auch als Graph einer Funktion aufgefasst werden.

Zunächst stellen wir fest, dass das System (6.16) genau zwei konstante Lösungen hat. Zum einen ist $b = r \equiv 0$ eine triviale Lösung des Systems. Um die zweite konstante

Lösung zu bestimmen, stellen wir zunächst fest, dass konstante Lösungen die Eigenschaft $b'(t) = r'(t) = 0$ haben. Somit folgt aus (6.16), dass

$$b(t) \equiv \frac{\beta}{\delta} \quad \text{und} \quad r(t) \equiv \frac{\alpha}{\gamma}$$

die einige weitere konstante Lösung des Systems ist⁴. Die Orbits der konstanten Lösungen sind Punkte im Phasenraum.

Um die nicht konstanten Lösungen des Systems (6.16) zu finden, werden wir das System der beiden Differentialgleichungen als eine einzelne Differentialgleichung auffassen. Wir schreiben, falls $b, r > 0$

$$b' = \alpha b - \gamma br \iff \frac{b'}{b} = \alpha - \gamma r \quad \text{und} \quad r' = -\beta r + \delta br \iff \frac{r'}{r} = -\beta + \delta b.$$

Hieraus erhält man

$$\frac{b'}{b}(-\beta + \delta b) - \frac{r'}{r}(\alpha - \gamma r) = 0.$$

Also

$$\frac{d}{dt}(-\beta \ln(b) + \delta b - \alpha \ln(r) + \gamma r) = 0. \quad (6.18)$$

Die Bedingung in (6.18) bedeutet, dass die Funktion

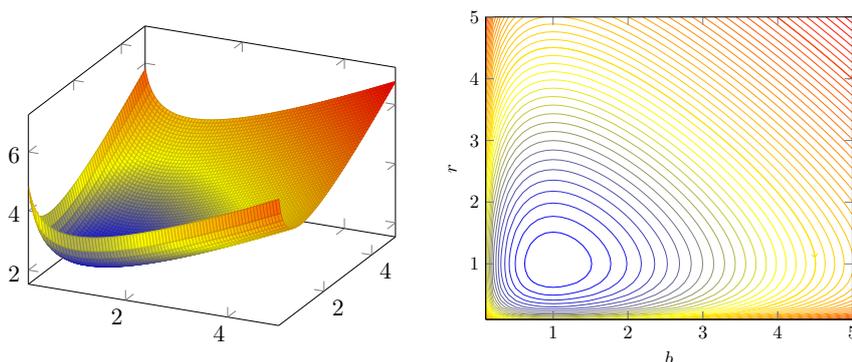
$$H(b, r) = -\beta \ln(b) + \delta b - \alpha \ln(r) + \gamma r$$

konstant entlang der Lösungen des Systems (6.16) ist. Die Funktion H wird als *erstes Integral* oder *Konstante der Bewegung* für (6.16) bezeichnet.

Die Lösungen von (6.16) mit Anfangswert $(b_0, r_0) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ laufen entlang der Höhenlinien

$$\mathcal{H}(l) = \{(b, r) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \mid H(b, r) = l\}$$

von H .



Grafik 6.2: Graph der Funktion $H(b, r)$ für $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ und einige dazugehörigen Höhenlinien $\mathcal{H}(l)$.

Man sieht, dass die Höhenlinien der Funktion H geschlossene Kurven im ersten Quadranten um den Gleichgewichtspunkt $x = \left(\frac{\beta}{\delta}, \frac{\alpha}{\gamma}\right)$ sind.

⁴Diese konstante Lösung wird häufig als natürliches Gleichgewicht der beiden Populationen bezeichnet.

Alle Lösungen laufen auf periodischen Bahnen entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn um den Gleichgewichtspunkt x herum.

Aus der Grafik lassen sich die folgenden Regeln beobachten:

- Die Populationsgrößen schwanken periodisch und zeitlich versetzt (**1. Lotka-Volterra-Regel**)
- Die durchschnittliche Größe der Populationen von Räuber und Beute sind über einen längeren Zeitraum hinweg konstant (**2. Lotka-Volterra-Regel**)

Literaturverzeichnis

- [Bat80] BATSCHULET, E.: *Einführung in die Mathematik für Biologen*, Springer, Berlin (1980)
- [BJK07] BRAUNSS, H.A., JUNEK, H. & KRÄINER, T.: *Grundkurs Mathematik in den Biowissenschaften*, Birkhäuser Verlag, Basel (2007)
- [Can97] CANTOR, G.: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, *Math. Ann.*, **49**(2):207–246 (1897), URL <https://doi.org/10.1007/BF01444205>
- [ESS14] EICKHOFF-SCHACHTEBECK, A. & SCHÖBEL, A.: *Mathematik in der Biologie*, Springer-Lehrbuch, Springer, Berlin, Heidelberg (2014)
- [McN67] MCNAUGHTON, S.J.: Photosynthetic System II: Racial Differentiation in *Typha latifolia*, *Science*, **156**(3780):1363 (1967)
- [Sta05] STAIGER, D.: Am Puls des Lebens: Biologische Zeitmessung bei *Arabidopsis thaliana*, *BIOforum*, **28**:53–55 (2005)
- [Ste04] STELAND, A.: *Mathematische Grundlagen der empirischen Forschung*, Springer, Berlin (2004)