Prof. Dr. Moritz Kaßmann
Fakultät für Mathematik
Wintersemester 2018/19

Universität Bielefeld

Klausuraufgaben
Zweite Klausur zur Vorlesung *Anwendungen der Mathematik*
28. März 2019

Aufgabe 1 (9 + 9 Punkte)
Ein Löwenzahn ist bei Beobachtungsbeginn Anfang März 1 cm hoch. Nach einer Woche misst er schon 1,5 cm.

a) Wie hoch wäre der Löwenzahn nach 5 bzw. 10 Wochen, wenn man exponentielles Wachstum voraussetzen würde?

b) Erfahrungsgemäß wird Löwenzahn an diesem Standort aber höchstens 20 cm groß. Welche Höhe kann man für den beobachteten Löwenzahn nach 5 Wochen erwarten, wenn man von logistischem Wachstum ausgeht?

Lösung:

(a) Ansatz:

$$f : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(t) = f(t_0) e^{\lambda t}. \tag{1}$$

Aus dem Aufgabentext erhalten wir die Informationen

$$t_0 = 0, \quad f(t_0) = 1, \quad f(1) = 1{,}5,$$

wobei $f(t)$ die Höhe des Löwenzahns nach t Wochen in cm beschreibt. Setzen wir diese Informationen in (1) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 1{,}5 &= f(1) \\ \iff 1{,}5 &= 1 \cdot e^{\lambda \cdot 1} \\ \iff \ln(1{,}5) &= \lambda. \end{aligned} \tag{2}$$

Es folgt

$$f(t) = 1{,}5^t,$$

wobei wir betonen, dass t die Einheit Wochen trägt.

Bemerkung: Wahrscheinlich wird bei (2) *häufig gerundet, sodass* $\lambda = \ln(1{,}5) \approx 0{,}405$ *und somit* $f(t) = e^{0{,}405t}$. *Wer hier mit dem gerundeten Wert weiterrechnet, bekommt ebenfalls die volle Punktzahl.*

Zu bestimmen war nun die Höhe des Löwenzahns nach 5 und nach 10 Wochen. Durch Einsetzen erhalten wir

$$f(5) = 1{,}5^5 \approx 7{,}59375, \quad f(10) = 1{,}5^{10} \approx 57{,}665034.$$

Antwort: Nach dem Modell des exponentiellen Wachstums hätte der Löwenzahn nach 5 Wochen eine Höhe von ca. $7{,}6 cm$ und nach 10 Wochen ca. $57{,}67 cm$.

(b) Ansatz:

$$f : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{S \cdot f(t_0)}{f(t_0) + (S - f(t_0))e^{-Skt}}. \tag{3}$$

Aus dem Aufgabentext erhalten wir die Informationen

$$t_0 = 0, \quad f(t_0) = 1, \quad f(1) = 1,5, \quad S = 20,$$

wobei $f(t)$ die Höhe des Löwenzahns nach t Wochen in cm beschreibt. Setzen wir diese Informationen in (3) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f(1) &= 1,5 \\ \Longleftrightarrow \frac{20}{1+19e^{-20k}} &= 1,5 \\ \Longleftrightarrow 20 &= 1,5 + 1,5 \cdot 19e^{-20k} \\ \Longleftrightarrow 18,5 &= 28,5e^{-20k} \\ \Longleftrightarrow \frac{37}{57} &= e^{-20k} \\ \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{37}{57}\right) &= -20k \\ \Longleftrightarrow k &= \frac{\ln\left(\frac{57}{37}\right)}{20} \quad (\approx 0,0206). \end{aligned} \tag{4}$$

Folglich ist

$$f(t) = \frac{20}{1 + 19 \cdot \left(\frac{37}{57}\right)^t} \quad \left(\approx \frac{20}{1 + 19 \cdot e^{-0,412t}}\right).$$

Für die Höhe des Löwenzahns nach 5 Wochen bestimmen wir

$$f(5) = \frac{20}{1 + 19 \cdot \left(\frac{37}{57}\right)^5} \approx 6,27.$$

Antwort: Wird von logistischem Wachstum ausgegangen, so beträgt die Höhe der Löwenzahnpflanze nach 5 Wochen ca. $6,27cm$.

Aufgabe 2 (6 + 6 + 4 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^3 4x - x^2 \, \mathrm{d}x$$

und stellen Sie den Wert grafisch dar.

b) Sei $L \geq 1$ eine Zahl. Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^L x^{-2}\,\mathrm{d}x$$

und stellen Sie den Wert grafisch dar.

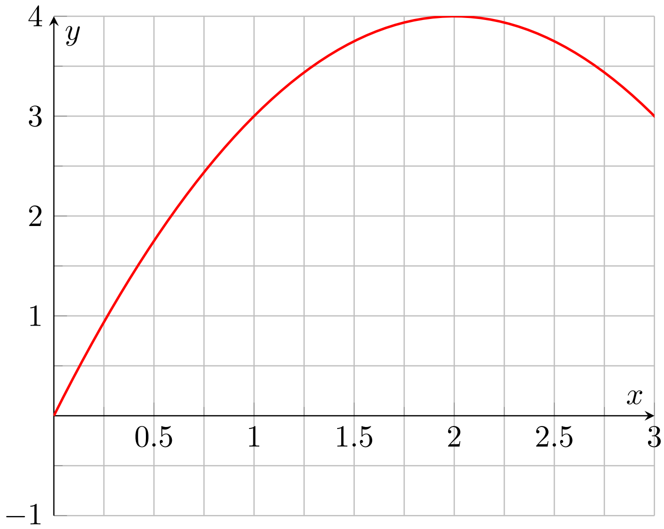
c) Der Wert des Integrals aus Aufgabe b) hängt von der Wahl von L ab. Wir bezeichnen den Wert des Integrals mit $f(L)$, wobei L im Intervall $[1,\infty)$ gewählt werden kann.

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$.

Lösung:

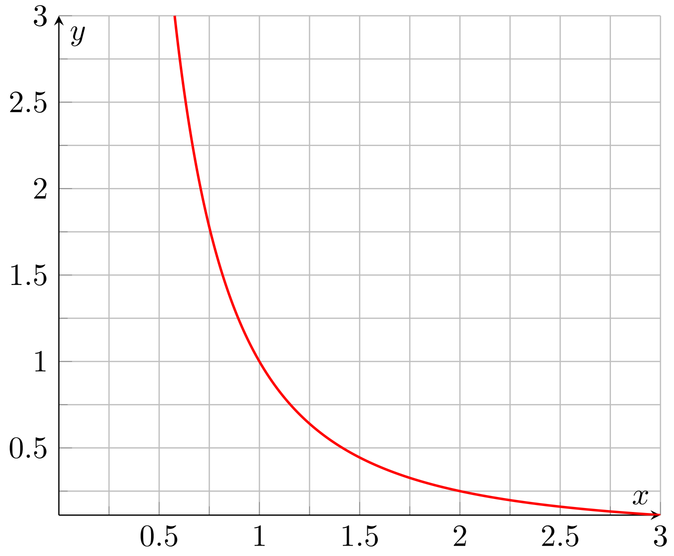
a) Es gilt

$$\int_0^3 4x - x^2\,\mathrm{d}x = \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 9.$$

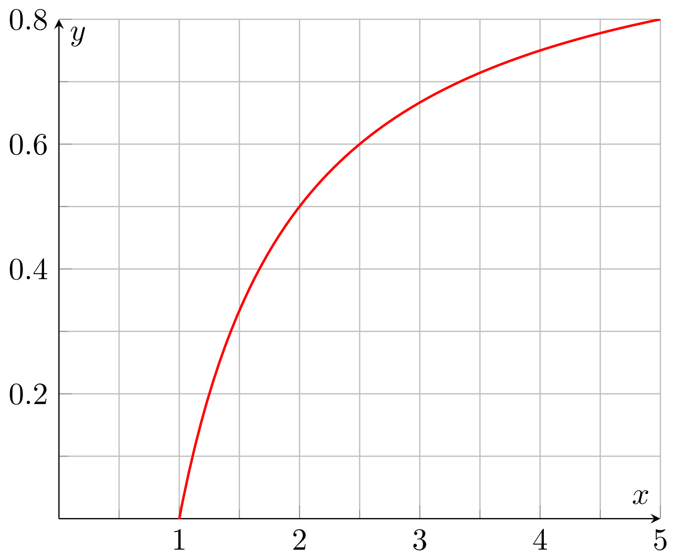


b) Es ist

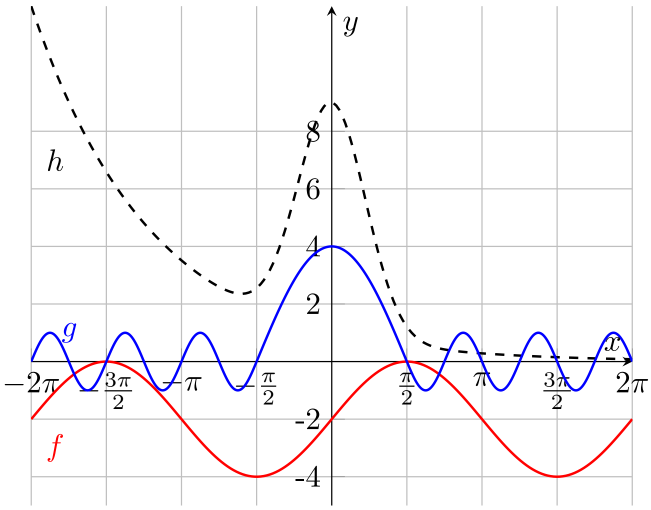
$$\int_1^L x^{-2}\,\mathrm{d}x = \left[-x^{-1}\right]_1^L = 1 - \frac{1}{L}.$$



c) Sei also $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - \frac{1}{x}$. Dann sieht die grafische Darstellung wie folgt aus:



Aufgabe 3 (9 + 4 + 3 Punkte)
Gegeben sind drei Funktionen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



(a) Im Klausurbogen finden Sie drei leere Grafiken bzw. Koordinatensysteme. Tragen Sie dort die Graphen der Ableitungen von f, g und h ein.

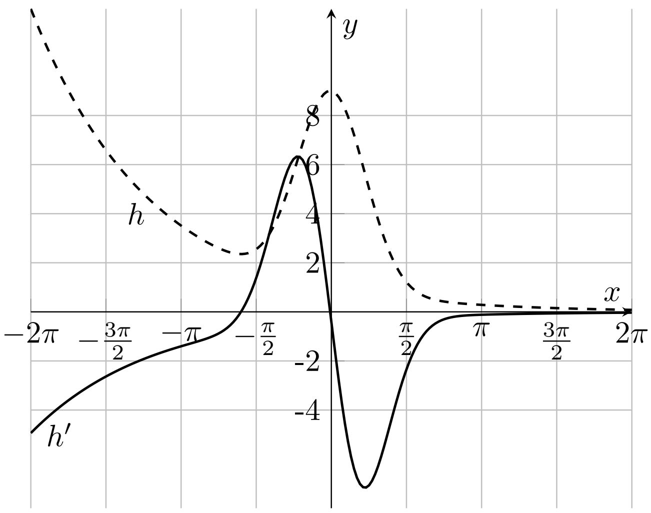
(b) Geben Sie die Zuordnungsvorschriften für die periodischen Funktion f an.

(c) Finden Sie alle Lösungen $x \in [0, 2\pi]$ der Gleichung

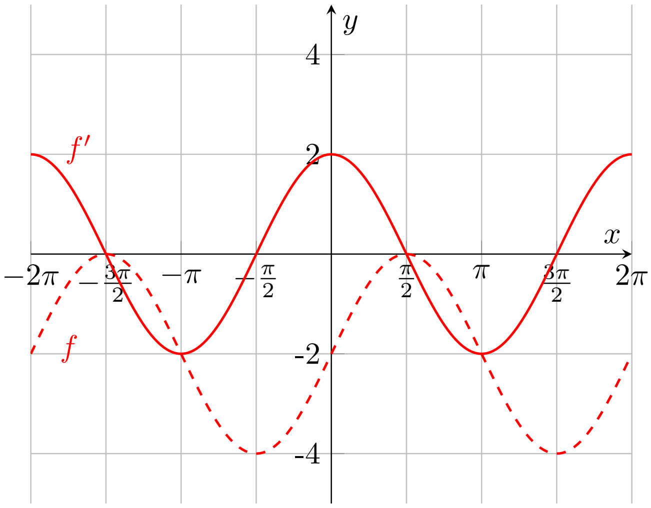
$$\sin^2(x) - \cos^2(x) = 1.$$

Lösung:

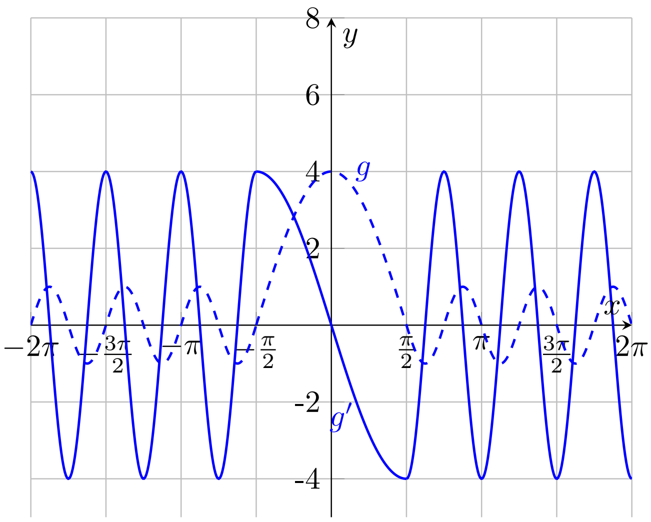
(a) Die Grafik von h mit Ableitung h' sieht wie folgt aus:



Die Grafik von f mit Ableitung f' sieht wie folgt aus:



Die Grafik von g mit Ableitung g' sieht wie folgt aus:



(b) Es gilt

$$f : [-2\pi, 2\pi] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2\sin(x) - 2 = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - 2.$$

(c) Unter Benutzung der Identität $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, d.h. $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ erhalten wir durch Einsetzen

$$1 = \sin^2(x) - \cos^2(x) = 2\sin^2(x) - 1 \Leftrightarrow \sin^2(x) = 1 \Leftrightarrow \sin(x) = \pm 1,$$

was uns

$$x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

liefert.

Aufgabe 4 (2 + 16 Punkte)
Die Funktion $f\colon [1,10] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = (x-3)^2 \cdot e^{-x}\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Nullstelle(n) der Funktion f.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extremstellen inkl. der zugehörigen Funktionswerte von f.

Lösung:

(a) Gesucht sind alle $x \in [1,10]$ mit $f(x) = 0$. Es gilt

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 3.$$

Folglich hat die Funktion f eine (doppelte) Nullstelle bei $x = 3$.

(b) Die notwendige Bedingung für Extremstellen lautet: $f'(x) = 0$. Dies liefert

$$\begin{aligned} 0 = f'(x) &= 2(x-3)\cdot 1\cdot e^{-x} - (x-3)^2 e^{-x} \\ &= (-x^2 + 8x - 15)e^{-x} \\ &= -(x-3)(x-5)e^{-x}. \end{aligned}$$

Da $e^{-x} > 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$, ist die obige Gleichung äquivalent zu

$$(x-3)(x-5) = 0.$$

Folglich sind $x = 3$ und $x = 5$ Kandidaten für ein lokales Extremum von f.

Eine hinreichende Bedingung für lokale Extremstellen lautet: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$. Wir berechnen daher $f''(3)$ und $f''(5)$. Zunächst gilt

$$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 10x + 23).$$

Also $f''(3) = 2 \cdot e^{-3} > 0$ und $f''(5) = -2 \cdot e^{-5} < 0$. Wir folgern, dass f in $x = 3$ ein lokales Minimum und in $x = 5$ ein lokales Maximum besitzt. Anschließend berechnen wir die Werte von f an den Stellen $x = 3$ und $x = 5$ und überprüfen das Randverhalten:

$$\begin{aligned} &f(3) = 0, \quad f(5) = 4e^{-5} \approx 0{,}027, \\ &f(1) = 4e^{-1} \approx 1{,}47152, \quad f(10) = 49e^{-10} \approx 0{,}0022246. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also: Das globale Maximum der Funktion f wird an der Stelle $x = 1$ angenommen. Das globale Minimum liegt an der Stelle $x = 3$. Es gibt ein lokales Maximum an der Stelle $x = 5$ und ein lokales Minimum bei $x = 10$ (da $f'(x) < 0$ für $x \in (5,10]$).

Aufgabe 5 (2 + 2 + 3 + 3 + 2 + 4 Punkte)

(a) Sie werfen einen fairen sechsseitigen Würfel.

(i) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, beim dritten Wurf eine Drei zu würfeln?

(ii) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, beim fünften Wurf erstmalig eine Drei zu würfeln?

(iii) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, beim dritten Wurf eine Drei zu würfeln unter der Bedingung, dass Sie sowohl beim ersten Wurf als auch beim zweiten Wurf eine Drei geworfen haben?

(iv) Sie addieren die Augenzahl der einzelnen Würfe. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie nach zehn Würfen eine gerade Summe erreicht haben?

(b) Sie werfen wie beim Spiel Kniffel 5 faire Würfel gleichzeitig.

(i) Sie werfen einmal. Ein Würfel wird durch den Becher verdeckt. Die anderen vier Würfel zeigen alle dieselbe Zahl. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der fünfte Würfel diesselbe Zahl zeigt?

(ii) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, bei 10 Würfen keinen Fünferpasch zu würfeln? *(Ein Fünferpasch bezeichnet das Ereignis, dass alle fünf Würfel dieselbe Augenzahl zeigen.)*

Lösung:

(a) Zu (i): Für den dritten Wurf gibt es unabhängig vom Ausgang der ersten zwei Würfe 6 Möglichkeiten ($\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$). Folglich ist

$$\mathbb{P}(\{3.\text{ Wurf zeigt } 3\}) = \frac{1}{6}.$$

Zu (ii): Sei X die Zufallsvariable, die angibt, beim wievielten Wurf zum ersten Mal eine 3 fällt. Dann ist X geometrisch verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$ und es gilt

$$\mathbb{P}(X=5) = (1-p)^4 \cdot p = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{625}{7776} \approx 0,0804.$$

Zu (iii) Wir wissen bereits, dass beim ersten und zweiten Wurf jeweils eine 3 gewürfelt wurde. Für den dritten Wurf gibt es wieder 6 Möglichkeiten ($\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$), also ist

$$\mathbb{P}(\{3.\text{Wurf zeigt } 3\} | \{1.\text{ und } 2.\text{Wurf zeigen } 3\}) = \frac{1}{6}.$$

Alternativ: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^3$ beschreibe den Ergebnisraum beim dreimaligen Wurf eines fairen sechsseitigen Würfels. Es gilt $|\Omega| = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$. Wir definieren die Ereignisse

$$\begin{aligned} A &= \{3.\text{Wurf zeigt } 3\}, \quad |A| = 6^2 \cdot 1 = 36 \\ B &= \{1.\text{ und } 2.\text{Wurf zeigen } 3\}, \quad |B| = 1 \cdot 6 = 6. \end{aligned}$$

Dann ist $A \cap B = \{(3,3,3)\}$ und es gilt

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{216}}{\frac{6}{216}} = \frac{1}{6}.$$

Zu (iv): Um nach zehn Würfen eine gerade Summe der Augenzahlen zu haben, muss unter den zehn Würfen entweder eine gerade Anzahl an ungeraden Augenzahlen sein oder der Würfel zeigt nach jedem Wurf eine gerade Augenzahl. Die Wahrscheinlichkeit pro Wurf eine gerade bzw eine ungerade Augenzahl zu würfeln beträgt jeweils $\frac{1}{2}$. Sei X die Zufallsvariable, die angibt, bei wie vielen der 10 Würfe eine ungerade Augenzahl gewürfelt wird. Dann ist X binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = \frac{1}{2}$. Die Wahrscheinlichkeit nach 10 Würfen eine gerade Augensumme zu erhalten ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\{\text{Augensumme ist nach 10 Würfen gerade}\}) \\
&\quad = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=4) \\
&\qquad + \mathbb{P}(X=6) + \mathbb{P}(X=8) + \mathbb{P}(X=10) \\
&\quad = \binom{10}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \\
&\qquad + \binom{10}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \\
&\quad = \frac{1+45+210+210+45+1}{2^{10}} \\
&\quad = \frac{512}{1024} \\
&\quad = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(b) Zu (i): Es ist bereits bekannt, dass vier der fünf Würfel dieselbe Augenzahl zeigen. Für den verdeckten Würfel gibt es unabhängig von den anderen vier Würfeln 6 Möglichkeiten. Eine davon stimmt mit der Augenzahl der anderen vier Würfel überein. Folglich ist

$$\mathbb{P}(\{\text{5. Würfel zeigt dieselbe Augenzahl}\}) = \frac{1}{6}.$$

Zu (ii): Die Wahrscheinlichkeit dafür einen Fünferpasch zu erzielen beträgt

$$\left(\frac{1}{6}\right)^5 \cdot 6 = \left(\frac{1}{6}\right)^4.$$

Sei X die Zufallsvariable, die angibt wie oft bei 10 Würfen ein Fünferpasch gewürfelt wird. Dann ist X binomialverteilt mit $n = 10$ und Erfolgwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6^4}$. Die Wahrscheinlichkeit keinen Fünferpasch zu würfeln ist folglich gegeben durch

$$\mathbb{P}(X=0) = \binom{10}{0} \cdot (1-p)^{10} \cdot p^0 = \left(1 - \frac{1}{6^4}\right)^{10} \approx 0{,}9923.$$

Aufgabe 6 (2 + 4 + 4 + 4 + 2 Punkte)

(a) Geben Sie eine Definition von $0,\overline{3}$ an.

(b) Erklären Sie präzise, warum die Gleichung $0,\overline{3} = \frac{1}{3}$ gilt. Sie dürfen die Identität $0,\overline{9} = 1$ hierbei nicht verwenden.

(c) Sie zahlen 1000 EUR auf ein Konto ein. Die Bank verzinst das Guthaben jedes Jahr mit 4%. Der Zinsertrag wird ihrem Konto gutgeschrieben.

  (i) Nach wie vielen Jahren erreicht Ihr Kontostand 2000 EUR?

  (ii) Bei welchem Zinssatz würde sich Ihr Kapital nach 7 Jahren verdoppelt haben?

  (iii) Wir gehen wieder von einem Zinssatz von 4% aus. Wie groß ist der Kontostand nach 20 Jahren, wenn Sie nach einem Jahr und danach jedes Jahr einmal 10 EUR abheben?

Lösung:

(a)

$$0,\overline{3} = 3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k$$

(b)

$$\begin{aligned}
0,\overline{3} &= 3 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k \\
&= 3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k - 3 \\
&= 3 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 3 \\
&= 3 \cdot \frac{10}{9} - 3 \\
&= \frac{10}{3} - 3 \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(c) Das Guthaben $G(t)$ nach t Jahren wird beschrieben durch die Funktion

$$G(t) = 1000 \cdot 1,04^t.$$

Eine Herleitung dieser Funktion kann mit dem Modell des exponentiellen Wachstums erfolgen. Ansatz: $G(t) = G(t_0)e^{\lambda t}$ mit $t_0 = 0, G(t_0) = 1000$. Wir wissen weiterhin $G(1) = 1040$. Dann gilt

$$1040 = G(1) = 1000 \cdot e^{\lambda \cdot 1} \Leftrightarrow e^{\lambda} = \frac{1040}{1000} = 1,04.$$

Dies führt zu der oben angegebenen Funktion für das Guthaben G.

Zu (i): Gesucht ist $t \geq 0$ derart, dass $G(t) = 2000$. Es gilt

$$G(t) = 2000 \Longleftrightarrow 1000 \cdot 1,04^t = 2000 \Longleftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{\ln(1,04)} \approx 17,673.$$

Nach ca. 17,673 Jahren hat der Kontostand eine Höhe von 2000 EUR erreicht.

Zu (ii): Gesucht ist der entsprechende Zinssatz, sodass $G(7) = 2000$. Wir bestimmen

$$2000 = 1000 \cdot x^7 \iff 2 = x^7 \iff x = \sqrt[7]{2} \approx 1,1041.$$

Bei einem Zinssatz von ca. $10,41\%$ würde sich das eingezahlte Guthaben nach 7 Jahren verdoppeln.

Zu (iii): Wird immer nach einem Jahr ein Betrag in Höhe von 10 EUR abgehoben, so ist das Guthaben $G(t)$ nach t Jahren gegeben durch

$$\begin{aligned} G(t) &= 1000 \cdot 1,04^t - 10 \cdot \sum_{k=0}^{t-1} 1,04^k \\ &= 1000 \cdot 1,04^t - 10 \cdot \frac{1 - 1,04^t}{1 - 1,04} \\ &= 1000 \cdot 1,04^t + 250 \cdot \left(1 - 1,04^t\right) \\ &= 750 \cdot 1,04^t + 250. \end{aligned}$$

Es ist $G(20) \approx 1893,34$, d.h. der Kontostand läge nach 20 Jahren bei ca 1893,34 EUR.