EnLeMaH

Directrices para el aprendizaje Enactivo de las Matemáticas en casa

Este proyecto ha sido financiado con el apoyo de la Comisión Europea.

Esta publicación [comunicación] refleja únicamente las opiniones del autor, y la Comisión no se hace responsable del uso que pueda hacerse de la información contenida en ella.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

UNIVERSITÄT BIELEFELD
Faculty of Mathematics

incoma

uniri

ST. IGNATIUS OF LOYOLA
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Índice

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

1. Marco teórico para una práctica de enseñanza y aprendizaje activa

1.1. Introducción

Introducir un enfoque enactivo en la enseñanza de las Matemáticas facilita a los estudiantes a construir una mapa mental para comprender los conceptos y relaciones matemáticas y entender cómo pueden utilizar las Matemáticas en su vida diaria y en sus trabajos. El aprendizaje enactivo significa realizar actividades y experimentos a mano y manipulando los materiales para adentrarse en nuevos temas matemáticos, tener representaciones mentales del contenido matemático y descubrir relaciones matemáticas.

Por ello, las metodologías enactivas ayudan a aumentar la comprensión y el atractivo de las Matemáticas [...] y, en mayor medida, contribuyen a reducir el bajo rendimiento. No obstante, la adopción de un enfoque enactivo de las matemáticas se basa en dos condiciones previas o premisas principales.

Por un lado, los profesores necesitan adquirir y equiparse con las competencias pedagógicas adecuadas para poner en práctica esta metodología, especialmente en lo que respecta a su aplicabilidad al contexto de la educación y la formación digital. Por otro lado, los materiales enactivos pueden ser difíciles de conseguir en el contexto actual fuertemente afectado por la crisis de COVID-19 y especialmente considerando el hecho de que, durante varios meses, las escuelas estuvieron cerradas y la educación fue a distancia.

EnLeMaH seeks to promote the adoption of innovative digital pedagogical competencies for Mathematics school teachers, which will enable them to develop the knowledge and skills to:

a) Implementar una metodología de enseñanza y aprendizaje enactiva adaptada al contexto de la educación digital que contribuya a hacer más atractivas las Matemáticas para los estudiantes escolares (12-16 años);
b) Guiar a los estudiantes en la creación de materiales enactivos que apoyen sus procesos de aprendizaje, utilizando materiales que pueden encontrar en casa, con un enfoque especial en el aprendizaje de las funciones matemáticas.

Para ello, EnLeMaH distingue tres fases principales en el proyecto. Una primera fase (Resultado 1) está definida por la creación de un marco teórico en el que se basará posteriormente la creación del curso EnLeMaH para profesores de matemáticas de secundaria. La segunda fase del proyecto (Resultado 2) consiste en la creación de las unidades de aprendizaje y los materiales para el curso de formación de profesores.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

La tercera fase (Resultado 3), paralela a la segunda fase, es la estructuración de estas unidades de aprendizaje en forma de un curso online, el Curso de Formación de Profesores EnLeMaH.

Así, este documento "Orientaciones para el aprendizaje enactivo en el Hogar" (Resultado 1), recoge:

- Una aproximación teórica al enactivismo basada en los autores Maturana, Varela, Brown y en la teoría del desarrollo cognitivo incluyendo los modos de representación de Bruner.
- Sus implicaciones para la enseñanza/aprendizaje de contenidos matemáticos desde una perspectiva enactiva.
- Una revisión de los contenidos curriculares de matemáticas (12-16 años) en los diferentes países socios que participan en este proyecto.
- Un resumen de la tradición que cada uno de los países del proyecto tiene con los enfoques enactivos en la enseñanza de las matemáticas.
- Y, finalmente, los criterios que EnLeMaH establece para poder clasificar una actividad como enactiva. Junto con estos criterios, EnLeMaH propone una plantilla a seguir en la creación de nuevas actividades de aprendizaje enactivo.

1.2. Principios para investigar cómo enactivista

En este capítulo se analiza la relación entre la investigación y la enseñanza. Para EnLeMaH, los aspectos son fundamentales para la comprensión del aprendizaje y la enseñanza en situaciones enactivas. Nuestro enfoque para colaborar con las ideas enactivas está basado los principios para la investigación como enactivista de Brown (2015). En esta sección, presentaremos sus tres principios.

1.2.1. Principio 1: Implicaciones del saber/hacer y del "-ing".

Las teorías enactivistas se desarrollan a partir de la base biológica del ser y el enfoque enactivo consta de dos puntos (Brown, 2015):

- La percepción consiste en una acción guiada perceptualmente.
- Las estructuras cognitivas emergen de los patrones sensoriomotores recurrentes que permiten que la acción sea guiada perceptualmente. (Varela et al. 1991, pp. 172-173).

Figura 1: Grupos colaborativos compartiendo experiencias

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Así, "conocer es hacer, es aprender, es ser". Somos, literalmente, lo que hacemos, nuestro entorno nos ha creado como nosotros hemos creado nuestro mundo. (Brown, 2015).

> No se trata de una estructura cognitiva individual. Somos co-emergentes y donde hay una coordinación de acciones, como en una clase, o un grupo de colaboración, en un proyecto de investigación, emerge una cultura de prácticas que es lo suficientemente buena (acción efectiva) para hacer lo que hay que hacer. (Brown, 2015, p.189).

A continuación, como grupo colaborativo de investigadores y profesores, podemos compartir nuestras propias experiencias sobre el aprendizaje y la enseñanza, lo que nos permite escribir y discutir para obtener conclusiones (figura 1).

1.2.2. Principio 2: historia del acoplamiento estructural

Maturana y Varela (1992, p. 75) hablan de "acoplamiento estructural (o adaptación) siempre que existe una historia de interacciones recurrentes que conducen a la congruencia estructural entre dos (o más) sistemas". Es decir, una necesidad expresada por otro desencadena la acción de ayudar a satisfacer mis propias necesidades.

¿Cómo podemos utilizar la idea del acoplamiento estructural en los grupos de colaboración?

- - No hay certezas en la enseñanza y el aprendizaje, pero...
- - Lo que experimentamos a través de nuestras acciones es una interpretación, así que...
- - "Dos personas no pueden ver lo mismo ni compartir la misma conciencia. Sin embargo, podemos comunicarnos porque podemos hablar de los detalles de las experiencias comunes y, al hacerlo, la brecha entre las interpretaciones puede reducirse" (Brown, 2015, p.189).

Por eso, cuando somos capaces de compartir nuestras experiencias y debatir a partir de las preguntas necesarias para nuestro proyecto, la brecha entre nuestras interpretaciones se reduce y da paso a una visión común.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

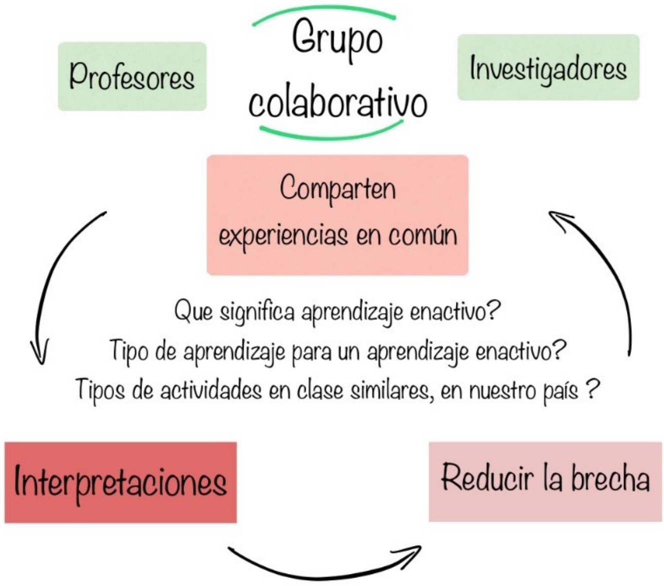


Figura 2: grupo colaborativo en el aprendizaje Enactivo

1.2.3. Principio 3 y 4: perspectivas múltiples y acción eficaz:

"La importancia de trabajar desde y con múltiples perspectivas y la creación de modelos y teorías que sean *suficientemente buenos para, no definitivamente de*" (Reid 1996, p. 207). “Eficaz" es una palabra técnica en las ideas enactivistas, vinculada a las estructuras cognitivas y a las acciones de aprendizaje "eficaces" se utilizó como "*suficientemente bueno para*" el aprendizaje de las matemáticas de los niños y para apoyar a los nuevos profesores en la reflexión y la investigación.

Los miembros del grupo de colaboración de investigadores/profesores no trabajan para obtener "respuestas", sino para ampliar nuestro abanico de posibles prácticas eficaces. En los siguientes capítulos, este abanico será más preciso en el ámbito de las representaciones y la base biológica del aprendizaje enactivo.

1.3. Teoría del crecimiento cognitivo de Jerome S. Bruner

> Creo que es fructífero distinguir tres sistemas de procesamiento de la información mediante los cuales los seres humanos construyen modelos de su palabra: a través de la acción, a través de las imágenes y a través del lenguaje (Bruner 1965, p.1).

Como Bruner afirmó anteriormente, las personas representan su aprendizaje y el mundo en el que viven a través de la acción si no pueden hacerlo mediante imágenes o palabras. Asumió sobre el aprendizaje que cualquier materia puede ser enseñada en cualquier etapa de desarrollo de manera que se cumplan sus capacidades cognitivas. Para aprender una actividad más cualificada, tiene que "descomponerse

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

en componentes más simples, cada uno de los cuales puede ser llevado a cabo por un agente menos hábil" (Bruner 1964, p. 2). Las representaciones son el producto final de un sistema de codificación y procesamiento de experiencias pasadas. De ahí que introdujera un modelo que incluía tres modos de representación, tal y como se recoge en la tabla 1). En su opinión, las personas representan sus conocimientos de esas tres maneras. Los modos de representación "no son estructuras, sino que implican diferentes formas de procesamiento cognitivo" (Schunk 2012, p.457).

Tabla 1: modelos de representación.

Nombre del modo de representación		Descripción	Ejemplos en clases de matemáticas
Modo de representación activa		Sugiere que las personas representen su aprendizaje y el mundo en el que viven a través de la acción si no pueden utilizar imágenes o palabras. Un alumno entiende mejor su entorno interactuando con los objetos que le rodean	Utilizar material para representar un concepto matemático. 
Modo de representación icónico		Resume los acontecimientos por la organización selectiva de los conceptos y de las imágenes, por las estructuras espaciales, temporales y cualitativas del campo perceptivo y sus imágenes transformadas.	Utilizar imágenes (por ejemplo, imágenes de la situación (matemática), gráficos) para representar un concepto matemático
Modo de representación simbólica	Simbólico-verbal	Cada palabra tiene una relación fija con algo que representa.	Utilizar la palabra (realmente hablada) para representar un concepto matemático.
	Simbólico-no verbal	Cada símbolo tiene una relación fija con algo que representa.	Utilizar frases escritas y símbolos matemáticos (por ejemplo, ecuaciones) para representar un concepto matemático.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Para el aprendizaje enactivo, estos modos de representación se corresponden en el proceso de aprendizaje (figura 3). Las situaciones enactivas se traducirán en representaciones icónicas y se reflejarán en esa situación. La base de la enactividad y/o la representación icónica será la base de la transformación simbólica y al revés: los modos simbólicos se transformarán en los modos icónicos y enactivos.

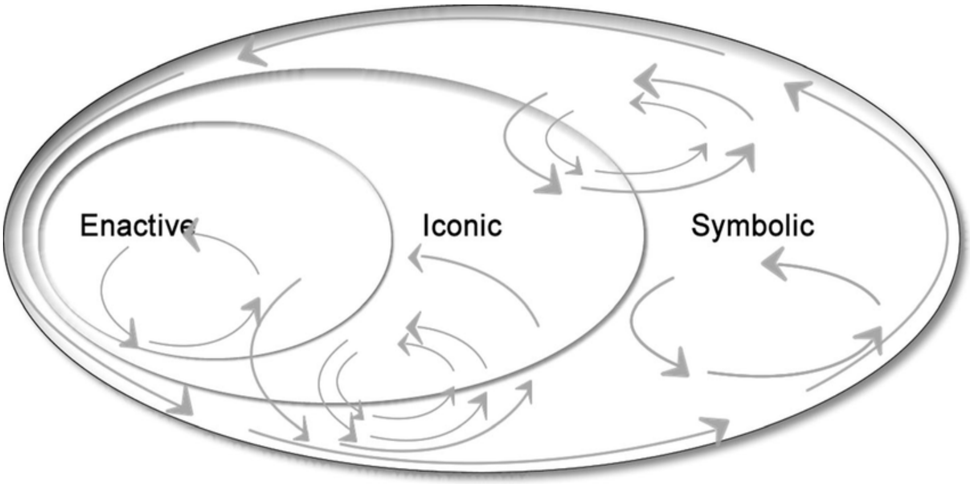


Figure 3. Lo activo, lo icónico y lo simbólico como anidado, co-implicado y simultáneo (Francis, Khan, David, 2016, p.8)

Con ello, los tres modos de representación abordan un aspecto teórico central para el proyecto EnLeMaH: Para la comprensión y la creación de actividades de aprendizaje enactivo, la separación entre los diferentes modos es básica. En el próximo capítulo, profundizaremos en los aspectos del diseño del aprendizaje activo.

1.4. Aprendizaje Enactivo: bases biológicas

Según Di Paolo (2018), el término enactivo fue utilizado antes de las bases biológicas que conforman la teoría en la actualidad. Por ejemplo, Bruner (1966), utilizó el término enactivo para establecer una relación entre las representaciones y los aspectos corporales pertenecientes a la experiencia vivida por una persona. Actualmente el significado del enactivismo se basa en los trabajos iniciados por el biólogo Francisco Varela (1946-2001) y en los trabajos realizados juntamente con Maturana (1980, 1987). Hoy en día esta perspectiva teórica continúa su desarrollo por parte de varios grupos de investigadores que se centran en diferentes áreas de estudio: Brown, L., 2011, 2012, 2015. Coles, A., 2013, 2015. Di Paolo, 2005, 2018. Lozano, MD. 2004, 2015, por citar algunos.

Varela, Thompson y Rosch (1991) utilizaron las palabras "enacción" y "enactivo" para describir la visión cognitiva de la lista de no-representación que expusieron, la cognición como "acción encarnada". Esto se refiere a dos puntos importantes: (1) la percepción consiste en una acción guiada perceptualmente y (2) las estructuras

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

cognitivas emergen de los patrones sensoriomotores recurrentes que permiten que la acción sea guiada perceptualmente (Varela et al. 1991, pp. 172-173).

Por tanto, para entender qué es la enacción, debemos entender qué es la percepción. Es importante señalar que la percepción se considera a veces un proceso pasivo (por ejemplo, cuando la luz entra en los ojos y se puede crear una imagen), pero en el enactivismo, la percepción es un proceso activo, y sin acción no hay percepción. Por otra parte, este proceso activo está determinado por la estructura del perceptor, por ejemplo: la forma en que un pájaro percibe una determinada situación es muy diferente a la que podría percibir una persona.

Por un lado, se entiende la organización como las relaciones que deben existir entre los componentes de algo para ser reconocido como miembro de una clase específica, y, por otro lado, se entiende la estructura de algo como los componentes y relaciones que constituyen específicamente una unidad particular que realiza su organización (Lozano, 2014). Maturana y Varela señalan que los seres vivos son sistemas en los que la estructura cambia continuamente, pero cuya organización se conserva (Maturana 1998a en Lozano, 2014). Esto ocurre en el particular modo de organización que denominan autopoiesis. Por lo tanto, un sistema *autopoiético* es aquel que a pesar de estar en constante cambio y producir nuevos sistemas de referencia. Según Matura (1987), el problema sería cómo manejar el problema del cambio de estructura y mostrar cómo un organismo que existe en un entorno y que funciona adecuadamente según sus necesidades, puede experimentar continuos cambios estructurales, aunque el entorno sea cambiante. Entonces, esto podría ser una aproximación al problema de la enseñanza de las matemáticas, un estudiante de matemáticas es un sistema que se organiza internamente en cada momento. Así, cada vez que le llega un estímulo, (por ejemplo, un símbolo matemático), éste se incorpora inmediatamente a la estructura del alumno, a su ser.

Por otro lado, según Lozano (2014), cuando los seres vivos interactúan con el entorno en el que se incluyen otros seres vivos y hay una interacción recurrente entre dos sistemas, entonces ambos cambiarán de manera similar. Desde esta perspectiva, podríamos decir que cuando una alumna de matemáticas interactúa repetidamente con su profesor y con los demás alumnos, juntos crearán una historia de interacciones. Por lo tanto, la estructura de todos los que participan en estas clases puede cambiar de forma similar, creando nuevas formas de comunicación y trabajo. Si esto no ocurre, los cambios estructurales no conducen a la adaptación al medio. Lozano (2014), presenta un ejemplo claro para ello: si una alumna suspende repetidamente los exámenes de matemáticas, en un determinado contexto esto podría suponer que esta alumna cambie la dinámica del grupo en la que se encuentra.

Algo importante de mencionar, es que el mundo no es algo que nos viene dado, sino algo con lo que nos relacionamos moviéndonos, tocando, respirando y comiendo, esto

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

es lo que Maturana y Varela llamaron cognición enactiva (Maturana y Varela, 1992). Así, el enactivismo indica que nuestra actividad mental (pensamientos, imágenes, emociones) está enraizada en las acciones que realizamos con y a través de nuestro cuerpo. Desde el punto de vista del enactivismo, el aprendizaje surge en la medida en que interactuamos activamente con el entorno, por lo que no puede pensarse en una mera absorción de información, ni la cognición es un fenómeno que surja solo dentro de la cabeza o el cuerpo de una única persona, sino que surge de las continuas interacciones con el entorno, que a su vez es modificado por estos. En nuestro caso, la sociedad y la cultura forman parte de nuestro entorno como seres humanos.

Esta concepción del enactivismo desde un punto de vista biológico, nos invita a pensar en la importancia del tipo de actividades que se seleccionan para abordar un contenido que tiene como objetivo el aprendizaje de las matemáticas. En general, son muchos los materiales de los que podemos disponer, pero debemos tener en cuenta el contexto en el que se desenvuelven el alumnado, el tipo de ambiente y el tipo de estructura que los compone. Es decir, debemos intentar crear modelos de tareas adecuados al nivel de los y las estudiantes junto con el uso de materiales que les permitan utilizar el cuerpo y lo tangible como herramienta principal para el desarrollo de nuevos aprendizajes, y así las imágenes que se crean sobre la actividad puedan ser experimentadas por ellos mismos a través de sus propias acciones. Todo ello debe ir acompañado de estrategias que permitan un buen desarrollo de las actividades de clase y una buena gestión del entorno teniendo en cuenta las características individuales y grupales.

Por lo tanto, el objetivo principal de las actividades que se produzcan en el marco de este proyecto EnLeMaH debe respetar la visión biológica del enactivismo, es decir, partir de objetivos de aprendizaje que puedan ser alcanzados a través de acciones que involucren al cuerpo. Tras ello, con las mismas imágenes y representaciones que el alumnado creará a través de la actividad, podemos apoyarnos en la teoría de Bruner para realizar las transformaciones necesarias para que se vinculen sus propias visualizaciones con otros modos de representación, sin perder de vista que la generación de las representaciones individuales del alumno o alumna está dada por su propia percepción de las acciones realizadas.

En el siguiente apartado podemos encontrar una pequeña pauta sobre las estrategias que se pueden utilizar a la hora de seleccionar una actividad enactiva y que también utiliza Bruner para la comprensión de las concepciones y conceptos erróneos con la ayuda de los diferentes modos de representación.

1.5. Principios e ideas enactivas para el diseño de actividades

1. Empezar con una actividad (cerrada) (que puede implicar la enseñanza de una nueva habilidad).

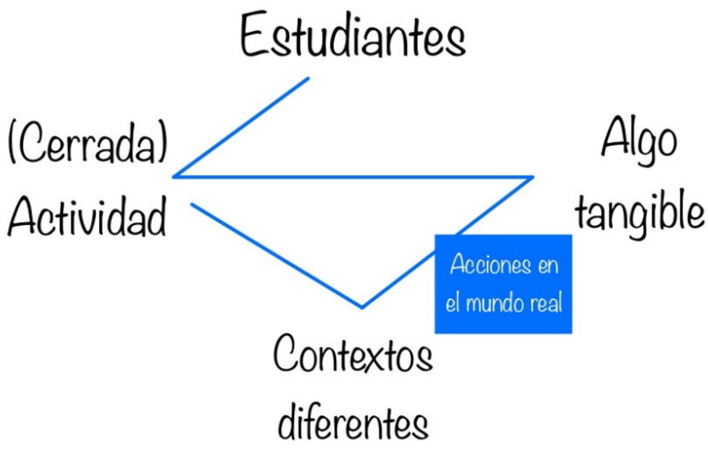
This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

2. Considerar al menos dos ejemplos contrastados (a ser posible, imágenes) y recoger las respuestas en un "tablero común".
3. Pedir al alumnado que comenten lo que creen que es igual o diferente en los ejemplos contrastados y generar un espacio para que planteen preguntas.
4. Tener preparada algunas preguntas en caso de que no se animen a participar.
5. Introducir el lenguaje y la notación que surja de los comentarios que haga el alumnado para mostrarles que están presentes en la explicación.
6. Ofrecer oportunidades para que detecten patrones, hagan conjeturas y trabajen para demostrarlas (lo que implica generalizar y el álgebra).
7. Generar oportunidades para que el o la profesora enseñe nuevas habilidades y para que el alumnado practique las habilidades en diferentes contextos.

En la medida de lo posible, la actividad consistirá en algo visible o tangible y que toda la clase pueda realizar. El reto y la oportunidad de enseñar habilidades en diferentes contextos están relacionados con el poder de extracción que tiene el ser humano. Cuando hacemos algo en diferentes contextos, es más probable que podamos extraer la habilidad y retenerla para usarla en otra ocasión (Coles y Brown 2013, p. 186-187). Una posible aproximación a la definición de aprendizaje enactivo sería: "aprender es ver más, ver de manera diferente, en un proceso recurrente vinculado a las acciones en el mundo que da retroalimentación que conduce a acciones adaptadas hasta que las conductas se vuelven efectivas, es decir, no se crean perturbaciones, y la acción es por lo tanto *'suficientemente buena'* para estar en el mundo" (Brown, 2015, p.190).

Hasta aquí hemos revisado las bases biológicas del aprendizaje enactivo, y la figura 4 nos muestra un posible contexto de aprendizaje. En el siguiente apartado veremos cómo las bases enactivas pueden vincularse a los modos de representación propuestos por Bruner que toma el enactivismo como base para mostrar cómo se empieza a desarrollar el conocimiento.

Figura 4: el contexto de aprendizaje



This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Las aportaciones teóricas de los tres primeros capítulos abordan diferentes puntos de vista sobre el aprendizaje enactivo: la conexión entre el investigador y el profesor, el tipo de modo de representación y los aspectos para diseñar el aprendizaje enactivo. En el siguiente capítulo se considerará un tipo especial de actividad: el experimento como actividad central para el aprendizaje enactivo.

1.6. Experimentos

Un experimento es un método científico mediante el cual se recopila información. Se utiliza tanto en la escuela como en la universidad y también en múltiples asignaturas. Pero hay una diferencia entre los experimentos en matemáticas y en otras asignaturas, que puede verse en la siguiente sección. Por lo tanto, los experimentos matemáticos tienen dos propósitos diferentes. Los pasos separados de los experimentos matemáticos pueden verse en el apartado 1.6.2.

1.6.1. El método "experimento" - diferencias entre las asignaturas

Siguiendo a Kirchner et al., los experimentos en ciencias naturales tienen diferentes propósitos: recopilar conocimientos, demostrar fenómenos, ofrecer "experiencias primarias" a los alumnos o verificar una relación o un modelo (cp. Kircher/Häußler/Girwidz, 2009). Todos estos propósitos conducen a una mejor comprensión de la naturaleza. Normalmente, un experimento en ciencias naturales consta de hasta seis pasos. Al principio hay que aclarar el objeto de investigación. Después, el alumnado debe recopilar hipótesis como segundo paso. El tercer y cuarto paso son la planificación y la ejecución del experimento. Durante la ejecución es importante la medición de los datos para analizarlos en busca de una correlación entre las cantidades. Este análisis es el quinto paso y sólo quedaría el último: la interpretación de los resultados. En el último paso se comparan los resultados y las hipótesis (cp. loc. cit.). La propia interpretación de los resultados suele conducir a otro objeto de investigación y, por tanto, a otro experimento. Aunque hay diferenciaciones entre los experimentos, por ejemplo, "¿Lo ejecutarán los alumnos o el profesor?" o "¿En qué fase de la clase se integra el experimento?" (cp. Wiesner/Schecker/Hopf, 2017, p. 106-114), en las ciencias naturales todo experimento se refiere a objetos reales.

Existen similitudes y diferencias entre los experimentos matemáticos y los experimentos de las ciencias naturales. En ambas asignaturas, un experimento describe una forma de reunir conocimientos mediante la observación de una acción controlada con "objetos" (cp. Ludwig/Oldenburg, 2007, p. 4). El proceso de experimentación en matemáticas es en gran medida idéntico al de las ciencias

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

naturales. El análisis de varios ejemplos o la manipulación con material es un punto de partida para que el alumnado construya hipótesis, por lo que el segundo paso puede sustituirse tras el tercero y el cuarto. Como los hechos matemáticos necesitan ser probados, el sexto paso de la interpretación sugiere aproximaciones a una prueba formal o conduce a una repetición del experimento con condiciones ligeramente diferentes (cp. Philipp, 2012, p. 27 o Goy/Kleine, 2015, p. 6). Por último, los experimentos matemáticos pueden separarse de los objetos reales (cp. párrafo 4). Por lo tanto, la experimentación en matemáticas necesita que el alumnado conozca la heurística y enseña competencias orientadas al proceso.

1.6.2. Experimentos matemáticos como proceso

Como se ha mencionado anteriormente, la experimentación en matemáticas es un ciclo de diferentes pasos. En referencia a Philipp (2012) y Goy/Kleine (2015) hay cuatro pasos principales para los experimentos matemáticos:

1. Plantear el problema y la pregunta.
2. Generar hipótesis.
3. Planificar, ejecutar y analizar el experimento (lo que sería el "ensayo")
4. Elaborar un modelo matemático, concepto o prueba.

En cada experimento, el primer paso es plantear el problema o la pregunta matemática y el último paso es la elaboración de un modelo, un concepto o una prueba. El orden de los demás pasos puede cambiarse teniendo en cuenta el objetivo del experimento. Si el experimento pretende verificar o falsificar hipótesis, éstas deben generarse en primer lugar. Si el experimento tiene como objetivo que los alumnos aprendan a experimentar o a elaborar sus propios modelos y conceptos, el ensayo debe situarse antes de la generación de hipótesis (cp. Goy/Kleine, 2015, p. 5f). Aunque no siempre es necesario recoger las hipótesis antes del ensayo.

Heintz establece tres contextos para los experimentos matemáticos: descubrimiento, validación y persuasión (cp. Philipp, 2012, p. 25). El contexto de descubrimiento pertenece a la generación de hipótesis y se entiende como un ensayo sistemático para explorar relaciones no identificadas. Aquí el conocimiento se obtiene por inducción. Por otra parte, el conocimiento se obtiene por deducción cuando una hipótesis dada es validada por el experimento matemático. En este caso, el experimento se sitúa en el contexto de la validación. Por último, si no se necesita ni descubrimiento ni validación porque una relación, concepto o modelo ya está confirmado, existe otro contexto para el experimento matemático: la persuasión. En este caso el experimento debe convencer a los alumnos (cp. loc. cit.).

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Sobre la base de los antecedentes teóricos, el aprendizaje activo en el proyecto EnLeMaH puede describirse como actividades prácticas que permiten a los estudiantes descubrir relaciones matemáticas o demostrar conexiones matemáticas. Las diferentes fases de un experimento pueden ser una guía para el profesorado basada en los principios de planificación, para organizar una situación de aprendizaje enactivo.
Para ello, en relación con la idea del enactivismo y el concepto básico de los experimentos en Matemáticas, examinaremos además los currículos escolares de cada país que se integra en el desarrollo del proyecto EnLeMaH, para asegurar que el contexto realizado se transfiere bien al sistema escolar correspondiente.

2. Breve resumen de los planes de estudio escolares

En el proyecto EnLeMaH participan investigadores y profesores de cuatro países diferentes. El objetivo de este proyecto es crear situaciones de aprendizaje enactivo en el campo de las funciones para estudiantes de 12 a 16 años. En los siguientes capítulos se tendrán en cuenta los diferentes planes de estudio de los países, para fundar una base para el aprendizaje activo en este campo de las matemáticas en la escuela.

2.1. Plan de estudio para las funciones en Croacia

En los planes de estudio de matemáticas de Croacia hay cinco temas principales: (A) Números, (B) Álgebra y funciones, (C) Geometría, (D) Medición y (E) Estadística y probabilidad. En el ámbito del "Álgebra y funciones" el alumnado define las funciones e interpreta, compara, representa gráficamente y aprende sobre sus propiedades reconociendo regularidades y describiendo la dependencia de dos cantidades en el lenguaje del álgebra. Modelan situaciones describiéndolas algebraicamente y resuelven problemas de la vida real que implican regularidades o dependencias funcionales. La siguiente tabla ofrece una visión general sobre los diferentes tipos de funciones que se trabajan con el alumnado de 12 a 16 años.

Tabla 2: Planes de estudio de Crocia

Grado		**Concepto de función**	**Representación Gráfica de las funciones**	**Proporciones**	**Función linear**	**Función cuadrática**
E D U	**6º grado**				Resolver y aplicar ecuaciones lineares	

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

CACIÓN PRIMARIA	**7º grado**	Contenido adicional: Conectar la dependencia lineal con la función lineal	Dependencia linear	Proporcionalidad y proporcionalidad inversa	Resolver y aplicar ecuaciones lineares. Aplicar dependencia linear Contenido adicional: Resolver una desigualdad lineal simple	
	8º grado				Resolver y aplicar una ecuación lineal Resolver y aplicar un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas	Resolver y aplicar una ecuación cuadrática de la forma $x^2 = k$
EDUCACIÓN SECUNDARIA	**1er grado (14,15 años)**	Función linear	Gráfica de una función linear	Aplicar la proporcionalidad y	Aplicar una ecuación lineal y un sistema de ecuaciones lineales. Aplicar desigualdades lineales en situaciones problemas. Conectar diferentes representaciones de una función lineal. Aplicar a una función lineal en la resolución de problemas.	
	2˚ grado (15,16 años)	Concepto y análisis de una función	Análisis de la representación gráfica de una función			Resolver y aplicar una ecuación cuadrática Aplicar una función cuadrática

Para profundizar en esos grados y en su demanda:

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

6º y 7º grado: Los alumnos analizan una situación problema para los conjuntos Z y Q y la formulan como una ecuación lineal. En 6º grado (también en 7º) reducen una ecuación lineal más compleja para formar $ax = b$ $(ax + b = 0)$ para a y b siendo números racionales no negativos (números racionales) aplicando equivalencias de ecuaciones. También resuelven una ecuación lineal sencilla con valor absoluto. Además de resolver ecuaciones lineales, los alumnos reconsideran la exactitud y el sentido de la solución obtenida y la explican en el contexto del problema. Un contenido adicional es la resolución de desigualdades lineales sencillas. En situaciones de la vida real, el alumnado reconoce y explica la proporcionalidad y la proporcionalidad inversa y determina e interpreta el coeficiente de proporcionalidad y la proporcionalidad inversa. Además, relacionan el coeficiente de proporcionalidad con el cociente de dos cantidades proporcionales. Se recomienda animar al alumnado a utilizar un enfoque intuitivo para resolver problemas de proporcionalidad y proporcionalidad inversa. También, que determinen y expliquen algunas unidades de medida complejas (km/h, m/s, g/cm^3, kg/m^3, habitantes/km^2) y convertir divisas.

En el resultado "Aplicar una dependencia lineal" el profesorado no pone a prueba la técnica de cálculo del alumnado, sino su pensamiento lógico y su capacidad para analizar el problema. El alumnado explica la dependencia lineal de cantidades a partir de situaciones problema de la vida real. Se hace hincapié en el estudio de las cantidades dependientes, en la traducción de la situación observada de dependencia lineal a una notación algebraica, en la interpretación de una representación gráfica de la dependencia lineal y en el análisis del cambio. El alumnado forma una tabla de valores asociados de datos linealmente dependientes. Representan gráficamente la dependencia lineal y establecen una conexión entre la dependencia y la función lineal.

8º gra: En problemas dados, el alumnado reconoce la posibilidad de resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Si el sistema es más complejo, lo reducen a una forma estándar y lo resuelven por un método dado o arbitrario. Además, discuten la existencia de la solución obtenida (unicidad, inexistencia, infinitas soluciones). El alumnado describe una ecuación cuadrática de la forma $x^2 = k$, donde k es un número racional no negativo y aplican la ecuación cuadrática para resolver situaciones problema y para representar cantidades mediante fórmulas matemáticas. También interpretan la existencia de dos soluciones.

1er grado: el alumnado escribe un problema dado en forma de ecuación lineal o sistema de ecuaciones lineales y los resuelven. Discuten la existencia de su solución considerando el valor de los parámetros. Resuelven también desigualdades lineales escribiendo la solución de diferentes formas, sistemas de desigualdades lineales con una incógnita e inecuaciones lineales simples con valor absoluto. Los alumnos relacionan diferentes representaciones de una función lineal. Para una función lineal dada, calculan el valor de la función, dibujan una gráfica, definen y determinan el cero de la función e interpretan los coeficientes.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Además, representan la función lineal mediante tablas y gráficos y describen la influencia de los coeficientes en la posición del gráfico. Los alumnos leen los parámetros y valores de la gráfica y determinan los coeficientes y la función. A partir de los elementos dados (parámetros y valores, puntos de la gráfica, coeficientes) determinan la función. El contenido ampliado para este grado consistiría en dibujar una gráfica de la función de valor absoluto. A partir de los datos dados, los alumnos escribirían la dependencia lineal como una función lineal. En situaciones problemas, reconocen una dependencia lineal, la escriben como función y la aplican para analizar el problema. Tienen que analizar un problema a partir de su representación gráfica. Por ejemplo, diseñar una tarea mostrada por el gráfico dado *(Figura 5):*

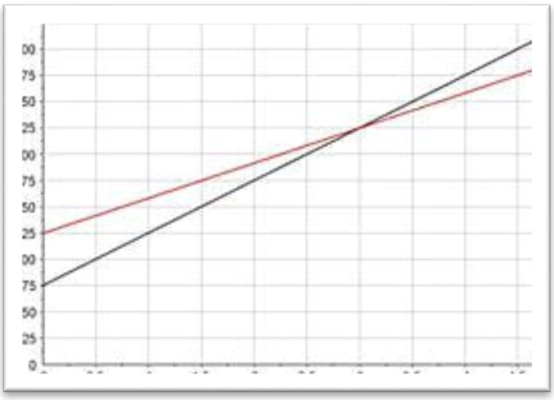


Figura 5: Diseñar la tarea a partir de un gráfico dado

2º grado: El alumnado resuelve eficazmente una ecuación cuadrática, comprueba sus soluciones y argumenta la naturaleza de estas. Por ejemplo: "Sin resolver la ecuación $3x^2 + 4x - 1 = 0$ determina la naturaleza de su solución. Asimismo, aplican el discriminante para determinar la naturaleza de la solución de una ecuación cuadrática. Además, resuelven ecuaciones que reducen a una ecuación cuadrática y modelan una situación problemática y determinan soluciones.

En el ámbito *"Análisis de una función"* los alumnos calculan el valor funcional de una función polinómica, racional e irracional. Explican el concepto de función y determinan computacionalmente el dominio y el codominio de figuras racionales e irracionales simples. Además, definen la biyección y la reconocen en los ejemplos de conjuntos mostrados por los diagramas de Venn y determinan la imagen de la función lineal y cuadrática. Las funciones racionales simples son de la forma $f(x) = \frac{a}{bx+c}$. Las funciones irracionales simples son de la forma$f(x) = \sqrt{ax+b}$.

En el dominio *"Análisis de la representación gráfica de una función"* los alumnos representan funciones gráficamente y determinan el dominio, el codominio y la imagen de una función mediante su gráfica. Por ejemplo "*Dibujar gráficas* $f(x) = \frac{1}{x}$ *y* $f(x) = \sqrt{x}$ *determinando el valor de la función para algunos valores de la variable* x.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

A continuación, esboza las gráficas de sus funciones inversas, mapeando las funciones sobre la recta $y = x$." Los alumnos dibujan la gráfica de una función cuadrática con coeficientes racionales. Determinan el cero, la intersección con la ordenada, el vértice de la parábola, el eje de simetría y también el recorrido de la función. También resuelven inecuaciones cuadráticas sencillas. Al representar gráficamente una función cuadrática, los alumnos explican la forma de la función en función del discriminante y del coeficiente principal.

El contenido extendido para este curso consiste en especificar una función del gráfico. Por ejemplo: los alumnos representarán gráficamente una función de la forma $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ utilizando la traslación y una función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ por el método de los cinco puntos (cero real, vértice de la parábola, intersección con la ordenada, cartografía de la intersección sobre el eje de simetría. La situación del problema incluye problemas con los extremos y la determinación de las intersecciones de las funciones cuadráticas y lineales. Por ejemplo: "*Al hacer un seguimiento de las ventas de un producto, se encontró que las ventas pueden ser descritas por una función cuadrática $f(x) = -\frac{3}{20}x^2 + 12x - 180$, donde x es el precio del producto, y $f(x)$ es el número de unidades del producto vendidas al precio de x. ¿Cuántos productos se venderán si el precio es de 30 kunas? ¿Cuánto ganará el comerciante? ¿A qué precio será máxima la venta de este producto?*

El tema de las funciones adquiere cada vez más importancia durante los cursos. Al principio, los números son el tema principal de la educación matemática en la escuela, con aproximadamente el 50% del tiempo de aprendizaje. El pensamiento funcional ocupa el 20% del tiempo de aprendizaje. Al final del periodo, el tratamiento de las funciones es el tema principal en las escuelas croatas, con un 45% del tiempo de aprendizaje.

2.2. Planes de estudio para las funciones en Alemania

En el sistema escolar ordinario de Alemania, existen tres tipos de graduación en la enseñanza secundaria hasta los 16 años. Todos ellos se refieren al concepto de funciones y a diferentes tipos de funciones. En la siguiente tabla se ofrece una visión general.

Tabla 3: Planes de estudios de Alemania

Tipo de función /	Proporción	Linear	Cuadrática	Trigonométrica	Exponencial

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Nivel educativo					
(Nivel bajo) Representa a los graduados de 9º grado (14,15 años)	Distinguir conceptualmente las asignaciones proporcionales (directa e inversa) y lineales y utilizarlas para los cálculos	Trabajar con las funciones lineales			
(Nivel medio) Representa a los graduados del 10º grado (15,16 años)			Trabajar con funciones cuadráticas en diferentes representaciones de términos	Describir procesos periódicos con la función seno	Conceptualizar el crecimiento exponencial y utilizarlo para los cálculos
Nivel alto		Describir procesos de crecimiento mediante funciones lineales. Resolver ecuaciones polinómicas que puedan reducirse a ecuaciones lineales por simple factorización o sustitución a ecuaciones lineales sin ayudas digitales.	Describir las propiedades de las funciones cuadráticas. Aplicar transformaciones sencillas a funciones cuadráticas. Resolver ecuaciones polinómicas que puedan reducirse a ecuaciones cuadráticas mediante una simple factorización o sustitución a ecuaciones cuadráticas.	Aplicar transformaciones sencillas a las funciones seno. Nombrar la función coseno como derivada de la función seno.	Describir procesos de crecimiento con la ayuda de funciones exponenciales. Aplicar transformaciones sencillas a las funciones exponenciales. Formar la derivada de la función exponencial natural. Describir las propiedades de las funciones exponenciales y la propiedad propiedad de la función exponencial natural. Utilizar las funciones exponenciales para describir los procesos de crecimiento y decadencia

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

					y comparar la calidad de la modelización de forma ejemplar con un crecimiento limitado.

En el plan de estudios alemán, el campo de las funciones está estrechamente relacionado con el de las ecuaciones. La educación primaria termina, en su mayoría, en el cuarto curso.

En la educación secundaria se aborda el campo de las funciones en los siguientes contenidos:

- Grado 5 y 6: pre conceptos de relaciones entre cantidades; uso de términos sencillos para describir situaciones; resolución de problemas fáciles de situaciones reales con métodos como el intento sistemático.
- ● grado 7 y 8: concepto de relaciones entre números y cantidades; relaciones proporcionales directas o inversas; cálculo de porcentajes como concepto de relación proporcional; concepto de término; concepto de ecuación lineal en situaciones fáciles, (p.e. 2x+5 = 3) con diferentes métodos para resolver ecuaciones como el intento sistemático, los métodos operativos y la transformación: concepto de función como relación especial; funciones proporcionales y lineales; concepto de ecuaciones lineales y resolución de las mismas con métodos algebraicos y gráficos; conexión entre función y ecuación; sistema de ecuaciones lineales.
  ● Grado 9 y 10: funciones cuadráticas; variación de parámetros; concepto de ecuaciones cuadráticas y resolución de las mismas con métodos algebraicos y gráficos; conexión entre función y ecuación; razón y ecuaciones fáciles con razón.
  Contenido extra: sistema de funciones (lineales, cuadráticas) y su resolución gráfica y algebraica; otros tipos de funciones que contrastan con las lineales y cuadráticas como las funciones exponenciales en contextos sencillos; el sen x como de función periódica.

En el plan de estudios alemán existen dos temas principales: (1) cálculo, (2) relaciones, funciones y ecuaciones. Los campos de (3) geometría plana, especialmente con triángulos, y (4) estadística no tienen la misma importancia que (1) y (2). (5) La geometría espacial está al final de los temas.

En los grados 5 y 6, los temas de las relaciones, las funciones y las ecuaciones tiene una extensión de aproximadamente el 20% de los planes de estudio de matemáticas alemán. Las preconcepciones se aplican en los temas de las cantidades y la geometría plana. En los grados 7 y 8, este tema tiene una extensión de aproximadamente el 50% siendo el tema dominante en estos grados. También en el

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

grado 9 y 10, adquiere un mayor peso, un 50%-60%. El estudio de las ecuaciones especiales también se trabajará en la parte relacionada con la geometría plana (por ejemplo, la relación en el teorema de las líneas de intersección).

2.3. Planes de estudio para las funciones en Lituania

En las escuelas lituanas, el ámbito de las funciones se desarrollará como se indica en la siguiente tabla.

Tabla 4: Plan de estudios en Lituania

	Comprender y utilizar tablas, gráficos y fórmulas	**Aplicación de modelos de funciones y propiedades**	**Aplicación del método de coordenadas para describir formas geométricas y estudiar sus propiedades.**	**Solución gráfica de ecuaciones, desigualdades y sus sistemas**	**Transformación de gráficos**
5-6 grado (11,12 años)	Leer (analizar) las relaciones entre dos cantidades expresadas en gráficos o tablas sencillas. Explicar con sus propias palabras lo que muestran los números en los ejes Ox y Oy. Encontrar el valor de una cantidad a partir de la gráfica o tabla dada cuando el valor de otra cantidad específica	Resolver las tareas más sencillas de contenido diario, en las que las dos medidas son directamente proporcionales. Dar ejemplos de cantidades directamente proporcionales, explicar cómo encontrar el valor de una cuando se conoce el valor de la otra.			
7-8 grado (13,14 años)	Utilizar tablas, gráficos y fórmulas que describan las dependencias de dos medidas, resolviendo	Apoyarse en modelos y propiedades de proporcionalidad directa o inversa, la propiedad de la proporción en la			

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

	problemas sencillos de contenido práctico y matemático. Explicar con sus propias palabras los conceptos de variable independiente y dependiente, saber cómo se denominan. En casos sencillos, determinar a partir de una gráfica, una fórmula o una tabla cómo hallar el valor de una cantidad cuando se especifica el valor de otra.	explicación de soluciones a problemas sencillos de diverso contenido. Recordar que las cantidades directamente proporcionales están relacionadas con la ecuación y / x = k, e inversamente proporcionales con la igualdad x · y = k, para dar ejemplos de cantidades relacionadas con tales dependencias. En los casos más sencillos, aplicar la propiedad básica de la proporción. Comprender cuántos puntos hay que seleccionar para dibujar un dibujo de una gráfica de proporcionalidad directa e inversa. Recopilar y completar una tabla parcial de valores de proporcionalidad directa e inversa cuando x> 0, para dibujar bocetos de sus gráficas. Ser capaz de comprobar si el punto pertenece al programa de la función.			
9-10 grado (15,16 años)	Combinar diferentes formas de expresar	Apoyarse en los modelos y propiedades de la	Trazar formas en el sistema de coordenadas,	To solve systems of linear equations	To perform transformations of the graph y = x2: stretching on

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

	funciones, aplicar las propiedades de una función en la resolución de problemas sencillos de contenido práctico y matemático. Describir los conceptos de variable independiente (argumento) y de variable independiente (función), escribir sus símbolos. En casos sencillos, a partir de una gráfica, una fórmula o una tabla, determinar qué cantidad es independiente y cuál es dependiente, para saber cómo encontrar el valor de una cuando se especifica el valor de otra. Determinar a partir de la gráfica si la dependencia de las dos cantidades es funcional. Dar ejemplos de funciones y no funciones. Explicar cómo comprobar si un punto pertenece a la gráfica de una función. A partir de la gráfica encontrar las áreas de definición y	proporcionalidad directa o inversa, la función lineal, cuadrática, la propiedad de la proporción para explicar las soluciones de problemas sencillos de diverso contenido. Reconocer la proporcionalidad directa o inversa, las funciones lineales, cuadráticas expresadas de diversas maneras, dar ejemplos de cantidades relacionadas con estas funciones. En casos sencillos, aplicar la propiedad básica de la proporción. Comprender cuántos puntos hay que elegir para dibujar las gráficas de las fórmulas y = kx + b, y = k / x and $y = x^2$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = a (x - m)^2 + n$; $y = a (x - x^1) (x - x^2)$ Saber cuáles son los nombres de las gráficas. Explicar cómo se escribe la expresión de una función a partir de una gráfica de funciones lineales y cuadráticas.	dibujar una forma simétrica con respecto al punto y la línea, describir la posición de las formas en el sistema de coordenadas en pares de números. Encontrar la longitud del segmento, las coordenadas del punto medio del segmento, cuando se conocen las coordenadas de los extremos del segmento. Asociar un par de números con su imagen en el sistema de coordenadas. Indicar a qué cuarto de coordenadas pertenece el punto. En el sistema de coordenadas, marcar un punto simétrico a una recta o punto dado, comprobar que las dos figuras son simétricas respecto al origen de las coordenadas, los ejes Ox y Oy. Para explicar con un ejemplo cómo	graphically approximately. To approximate graphically the equations f (x) = a, f (x) = g (x) and the inequalities f (x) a, f (x) ≤a, f (x) ≥a, where f (x) and g (x) are functions of direct, inverse proportionality, linear, quadratic, and a is a number. To explain the essence of the graphic method in your own words. To find the approximate solution of the system of linear equations from the graph. Based on the example, to explain how to find a solution to an equation or inequality with one unknown from a graph.	the Oy axis (y = ax2), thrusts on the Ox and Oy axes (y = x2 + n and y = (x - m) 2), symmetry with respect to the Ox axis (y = -x2); associate graph transformations with changes in the formula y = x2. To know how to transform the graph of a function using the graph's thrust on the Ox and Oy axes, tensile (pressure), symmetry. For example, having the graph of the function y = x2 explains how to draw the graph of the function y = a (x - m)2 + n.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

	valores de la función, intervalos de aumento, disminución, estabilidad de los valores de la función, valor máximo o mínimo de la función. Saber encontrar con qué valores de los parámetros, una función adquiere un valor particular, los valores de la función son positivos (o negativos) cuando la función se expresa en un gráfico o fórmula.		encontrar la longitud de un segmento, las coordenadas del punto medio del segmento cuando se conocen las coordenadas de los extremos del segmento.		

2.4. Planes de estudios para las funciones en España

En el sistema escolar español, en lo que respecta a la Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O), existen cuatro cursos que van desde los 12 a los 16 años de manera general.

Tabla 5: Plan de estudios español 1

	Curso y edad	
Educación primaria	1º EP– 6º EP	6 – 12
Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O)	1º ESO	12 – 13
	2º ESO	13 – 14
	3º ESO	14 – 15
	4º ESO	15 – 16

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

En los cursos de la ESO, las matemáticas se distribuyen en cinco bloques de aprendizaje: I. "Procesos, métodos y actitudes en matemáticas", II. "Números y álgebra", III. "Geometría", IV. "Funciones" y V. "Estadística y probabilidad".

Los principales temas tratados en cada curso, y en particular los contenidos relacionados con las funciones se pueden encontrar en la siguiente tabla:

Tabla 6: Plan de estudios español 2

Tipo de función **Nivel de graduación**	**Concepto**	**Proporción**	**Linea r**	**Cuadrática**	**Trigonométrica**	**Exponencial**
1º ESO 12-13	Representación de puntos en las coordenadas cartesianas					
2º ESO 13-14	Las variables dependientes e independientes, así como sobre los conceptos y el cálculo de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos. Los alumnos utilizan funciones de proporcionalidad (y=mx); funciones lineales (y=mx + n) y funciones constantes (y=k).	Distinguir proporcional, inverso y lineal	Sí		sin x	$a*b^x$

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

3º ESO 15-16	Concepto y características: Dominio, rango, puntos de intersección con los ejes, continuidad, monotonía, tendencia, periodicidad, curvatura, simetría	Sí	Sí	trabajar con funciones cuadráticas en diferentes representaciones de términos.	a*sin(bx+c)+d Describe los procesos periódicos con la función seno.	a*b^x Concepto de crecimiento exponencial y cálculo.

2.5. Conclusiones

Como se muestra en los capítulos anteriores, en los diferentes países participantes en el proyecto EnLeMaH, el campo de las funciones es el tema matemático más importante durante el periodo de aprendizaje basado en la educación secundaria. Los diferentes antecedentes culturales de los socios permiten suponer que esta importancia también existirá en los cuatro países. Además, los planes de estudio mostrados dan pistas de que el proceso de aprendizaje de las matemáticas en los distintos países en lo que respecta a los conceptos funcionales y los tipos de funciones es similar en cuanto al orden y la disposición. Esta es la base del trabajo común del profesorado para el aprendizaje activo, además de los puntos de vista específicos de cada país: la disposición de las funciones de aprendizaje en la escuela es bastante similar.

3. Aprendizaje y enseñanza enactiva en el proyecto EnLeMaH

En este capítulo se tendrá en cuenta la filosofía del aprendizaje activo en la escuela. De este modo, se considerará la implementación del aprendizaje activo en las normas nacionales, en los programas de formación del profesorado y en los programas universitarios.

3.1. Filosofía croata

Según el plan de estudios croata del curso de matemáticas para escuelas primarias e instituto a partir de 2019 (Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (nn.hr)), el aprendizaje y la enseñanza de la asignatura de matemáticas se consigue conectando los procesos y los dominios matemáticos. Esta bidimensionalidad se manifiesta en los resultados y contribuye a la adquisición de competencias matemáticas. Los procesos

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

matemáticos son: representación y comunicación, vinculación, razonamiento lógico, argumentación e inferencia, resolución de problemas y modelización matemática y aplicación de la tecnología. Los dominios de las asignaturas de matemáticas son: números, algebra y funciones, forma y espacio, medición y datos, estadística y probabilidad.

Según el plan de estudios, a pesar de la evolución de todos los conceptos y procesos, es necesario cambiar y modernizar la forma en que se aprenden y enseñan las matemáticas y proporcionar a los alumnos experiencias de aprendizaje diversas y ricas. La capacidad de aplicar lo que aprenden en una variedad de situaciones problemáticas y el conocimiento para regular su propio aprendizaje son especialmente importantes.
Al organizar el proceso de aprendizaje y enseñanza, el profesorado selecciona el alcance y la profundidad del aprendizaje y adapta los problemas, los métodos y las estrategias para satisfacer mejor las necesidades, las oportunidades y los intereses de los alumnos. Tanto el profesorado como el alumnado tienen autonomía para seleccionar los materiales y las tecnologías que harán que el aprendizaje de las matemáticas sea desafiante, variado y estimulante y que permita la realización de los resultados de aprendizaje previstos. El plan de estudios hace hincapié en que el libro de texto en clase de matemáticas proporciona contenidos que pueden utilizarse para lograr los resultados prescritos para todos los niveles de conocimiento, pero no restringe la planificación del proceso de aprendizaje y enseñanza ni la forma en que se lleva a cabo. El profesorado es libre de decidir cómo y en qué orden se cumplen los objetivos y qué bibliografía y fuentes de información adicionales utiliza el alumnado. Es responsable de adoptar un enfoque innovador, explorar nuevas fuentes de conocimiento y hacer un uso adecuado de las nuevas tecnologías para completar el aprendizaje y la enseñanza.

De lo anterior se puede deducir que el Plan Nacional de Estudios no prescribe ni sugiere cómo deben enseñarse determinados contenidos matemáticos dando libertad y responsabilidad del profesorado en el diseño del proceso de enseñanza.

El aprendizaje enactivo, que algunos de ellos ya han utilizado en el proceso de enseñanza, se ha convertido así en un tema para un mayor número de profesores, muchos de los cuales necesitan apoyo para dar sus primeros pasos en un nuevo enfoque de enseñanza. Para ayudarles, existe literatura profesional, especialmente textos que abordan el uso del aprendizaje enactivo en el aula de matemáticas. A continuación, se presentan algunos de ellos, que se describen con más detalle.

3.1.1. Ejemplos de aprendizaje enactivo en Croacia

- MiŠ (Matematika i škola) – Matemáticas y escuela (https://mis.element.hr/): Miš es una revista centrada en la educación y dirigida

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

a profesores, estudiantes y a cualquier persona interesada en las matemáticas. La revista se publica cuatro veces al año. En los artículos se introducen diversos temas relativos a la metodología de la enseñanza de las matemáticas. Además, se explican las actividades creativas y enactivas y se presentan las últimas experiencias en educación.

Ejemplos de artículos y documentos de aprendizaje enactivo en MIŠ:

- Lučić, Rad s algebarskim pločicama (Trabajando con fichas de álgebra), Matematika i škola XXI (2020), 105; 207-210.
- B. Majdiš, Računanje površine s pomoću tangram slagalice (Cálculo del área usando un tangram), Matematika i škola XXI (2020), 103; 102-10.
- A. Dika, Izračunavanje površine mnogokuta s pomoću točkaste mreže (Calcular el área mediante una red de puntos), Matematika i škola XX (2019), 98; 137-144. https://mis.element.hr/fajli/1709/98-11.pdf
- P. Valenčić, Matematika – nužno potrebna za život (Mathematics – necessary for life), Matematika i škola XX (2018), 97; 68-71. https://mis.element.hr/fajli/1691/97-04.pdf

- I. Brozović, S. Rukavina, Zome Tool modeli (Modelos de herramientas Zome), Matematika i škola XIX (2017), 92; 51-54. https://mis.element.hr/fajli/1605/92-02.pdf
- P. Valenčić, Od ideje do izrade drvenog nastavnog pomagala (De la idea a la creación de un material didáctico de madera), Matematika i škola XIX (2017), 92; 55-60. https://mis.element.hr/fajli/1606/92-03.pdf
- S. Ježić, Božićna zvijezda – vertikalno povezivanje (Estrella de Navidad - conexión vertical), Matematika i škola XIX (2017), 92; 68-72. https://mis.element.hr/fajli/1609/92-06.pdf
- T. Sabo, S. Rukavina, Origami i krivulje drugog reda (Origami y curvas de segundo orden), Matematika i škola XVIII (2016), 86; 20-22. https://mis.element.hr/fajli/1486/86-05.pdf
- M. Černivec, S. Rukavina, Radionica “Kombinatorne igre” (Taller "Juegos combinatorios"), Matematika i škola XIII (2011), 61; 14-16. https://mis.element.hr/fajli/1087/61-04.pdf

- Poučak (https://matematika.hr/izdanja/poucak/): Poučak es una revista centrada en la educación para la metodología de la enseñanza de las matemáticas. Fue fundada por la Sociedad Matemática Croata, que promueve la ciencia matemática, la enseñanza de las matemáticas a todos los niveles, la aplicación de las matemáticas en otras disciplinas, así como la mejora de la posición social de los matemáticos en su conjunto. La revista se publica cuatro veces al año

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

- Matka (https://matematika.hr/izdanja/matka/): Matka es una revista destinada a los alumnos de primaria y de los primeros cursos de secundaria, a sus profesores y también a los padres. Se incluyen diversos temas de geometría, aritmética, álgebra e historia de las matemáticas. Además, la revista incluye aplicaciones de las matemáticas a otras ciencias y al arte, problemas para estudiantes con talento, juegos matemáticos y rompecabezas. La revista se publica cuatro veces al año.

- Acta Mathematica Spalatensia (https://amas.pmfst.unist.hr/ams/): es una revista internacional dedicada a la publicación de artículos en todas las áreas de las matemáticas puras y aplicadas. La revista publica trabajos de investigación innovadores y originales y artículos de revisión de alta calidad.

El desarrollo de la alfabetización científica y matemática mediante estrategias de aprendizaje activo:

- S. Rukavina, B. Milotić, R. Jurdana-Šepić, M. Žuvić-Butorac, J. Ledić, Razvoj prirodoznanstvene i matematičke pismenosti aktivnim učenjem (El desarrollo de la alfabetización científica y matemática mediante estrategias de aprendizaje enactivo), Udruga Zlatni rez, 2010.

- El libro "The Development of Scientific and Mathematical Literacy Using Active Learning Strategies" (El desarrollo de la alfabetización científica y matemática mediante estrategias de aprendizaje activo) describe los retos de la enseñanza de las ciencias naturales y las matemáticas y señala la importancia del aprendizaje enactivo. El libro incluye 12 talleres - 6 talleres relacionados con las matemáticas y 6 talleres relacionados con la física.

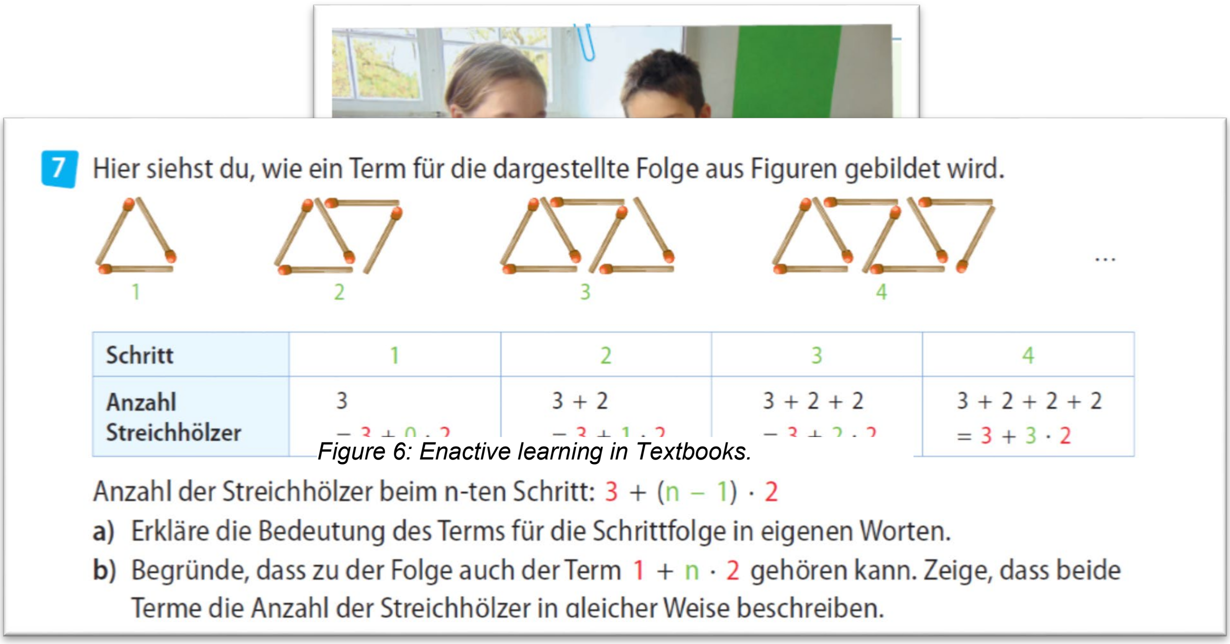
3.2. Filosofía alemana

Los estándares nacionales definen para los estudiantes procesos y actividades que, es la orientación para el aprendizaje de las matemáticas. Los estándares nacionales para el aprendizaje de las matemáticas se basan en tres experiencias básicas de Winter (1996). Estas experiencias pueden caracterizarse como (E1) orientación a la aplicación, (E2) orientación a la estructura y (E3) orientación al problema. Así, la orientación a la aplicación (E1) no significa directamente la preparación para situaciones concretas de la vida, sino más bien la posibilidad de una visión básica de la naturaleza, la sociedad y la cultura. La orientación hacia la estructura (E2) se centra más en el análisis de los objetos matemáticos en relación con una visión deductiva del mundo. La orientación hacia los problemas (E3), por su parte, hace hincapié en la adquisición de habilidades heurísticas para reconocer y utilizar muestras en los procesos de resolución de problemas. Sin embargo, estos tres aspectos están conectados entre sí.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

El entorno de aprendizaje de las matemáticas en la escuela debe permitir al alumnado realizar estas experiencias. El aprendizaje enactivo puede considerarse parte de E1 y E3, donde los alumnos entran en contacto con las matemáticas como parte de los procesos de modelización y situaciones de la vida real. Para facilitar las experiencias básicas, se definen las competencias como objetivo del aprendizaje matemático. Las competencias orientadas al proceso describen actividades y procesos básicos para el desarrollo de la comprensión de las matemáticas: argumentación matemática (K1), resolución de problemas (K2), modelización matemática (K3), uso de representaciones matemáticas (K4), uso de elementos simbólicos, formales y técnicos de las matemáticas (K5) y comunicación matemática (K6).

3.2.1. Ejemplos de aprendizaje enactivo en Alemania


7 Hier siehst du, wie ein Term für die dargestellte Folge aus Figuren gebildet wird.

Schritt	1	2	3	4
Anzahl Streichhölzer	3 = 3 + 0 · 2	3 + 2 = 3 + 1 · 2	3 + 2 + 2 = 3 + 2 · 2	3 + 2 + 2 + 2 = 3 + 3 · 2

Anzahl der Streichhölzer beim n-ten Schritt: 3 + (n – 1) · 2

a) Erkläre die Bedeutung des Terms für die Schrittfolge in eigenen Worten.

b) Begründe, dass zu der Folge auch der Term 1 + n · 2 gehören kann. Zeige, dass beide Terme die Anzahl der Streichhölzer in gleicher Weise beschreiben.

Figure 6: Enactive learning in Textbooks.

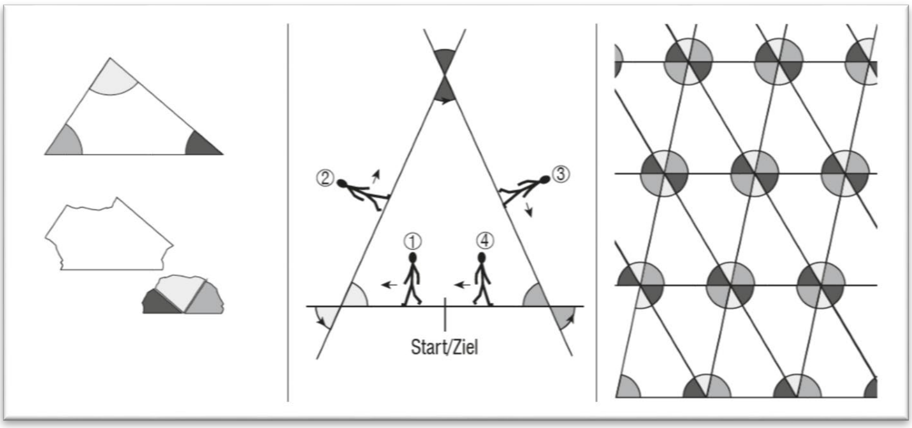
Figura 7: Ejemplo activo de función exponencial

En el ámbito del aprendizaje enactivo se describen los siguientes aspectos de las competencias en los estándares y planes de estudio nacionales:

- *Argumentación matemática (K1):* Esta competencia incluye la comprensión y evaluación de pruebas matemáticas, el desarrollo de secuencias de argumentación matemática y de supuestos. Para el aprendizaje enactivo esta competencia está profundamente conectada con el principio E-I-S de Bruner al manejar con material concreto para la suposición y argumentación matemática.

Figure 8: Enactive example Sum of angles in a triangle.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



- *Resolución de problemas (K2):* Esta competencia incluye el uso de estrategias y heurísticas para resolver problemas matemáticos y sus aplicaciones. Puede incluir estrategias conocidas y conexión de nuevas estrategias. Los planes de solución y los resultados se prueban y reflexionan críticamente. Esta competencia describe un metanivel de trabajo matemático. En lo que respecta al aprendizaje activo, también se pueden encontrar estrategias activas para la demostración sistemática de problemas matemáticos.

- *Modelización matemática (K3):* Esta competencia incluye la traducción entre las matemáticas y las situaciones del mundo real, también los conceptos, métodos y modelos. Para el aprendizaje enactivo, esta traducción entre el mundo real y el mundo matemático es un aspecto básico para describir, encontrar y utilizar conceptos y modelos matemáticos para comprender una situación y una tarea activas determinadas.

- *Uso de representaciones matemáticas (K4):* Esta competencia incluye la representación, su selección, diferenciación y realización de tipos de representación. Para el aprendizaje enactivo, el principio E-I-S de Bruner está profundamente relacionado con esta competencia.

- *Uso de elementos simbólicos, formales y técnicos de las matemáticas (K5):* esta competencia incluye los hechos y las reglas matemáticas, el uso de algoritmos para las operaciones algebraicas y geométricas. Por lo tanto, el uso sensato y reflexivo de las herramientas matemáticas forma parte de esta competencia. Para el aprendizaje enactivo se tiene en cuenta la resolución de tareas activas y el uso de reglas matemáticas.

- *Comunicación matemática (K6):* esta competencia incluye la comprensión de la información matemática dada verbalmente y por escrito. Además, la documentación de los planes de solución y el uso de los conceptos matemáticos con respecto a diferentes audiencias también forman parte de esta competencia. Para el aprendizaje enactivo, esta competencia tiene en cuenta el proceso de comunicación: desde la comprensión de las tareas o situaciones dadas hasta la documentación (por ejemplo, el uso o la realización de vídeos matemáticos).

3.3. Filosofía Lituana

Según el programa de matemáticas (2021), la asignatura de matemáticas en la escuela desempeña un papel único en el desarrollo de las habilidades del alumnado en materia de cálculo, pensamiento abstracto y lógico, pensamiento visual y espacial, análisis e interpretación de datos y habilidades de abstracción.

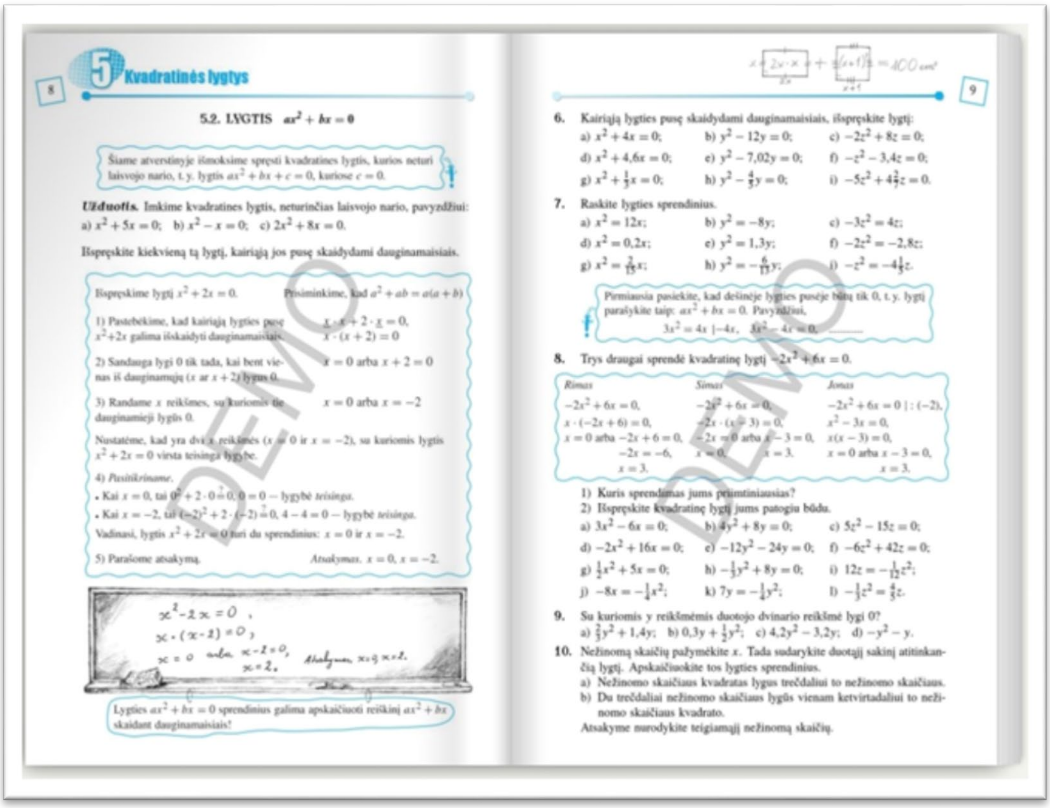
Los objetivos de la educación secundaria en matemáticas son los siguientes:

- Utilizar los conceptos matemáticos de forma adecuada y resuelta, indicar y explicar las conexiones entre ellos;
- Realizar procedimientos matemáticos con fluidez.
- Reconocer y aplicar el razonamiento matemático en diversos contextos.
- Organizar sus actividades de aprendizaje de forma responsable y eficaz.
- Comunicarse eficazmente a través del lenguaje matemático;
- Ver las conexiones entre las matemáticas y otras materias
- Utilizar las tecnologías digitales para aprender matemáticas;
- Tener confianza en sí mismos/as, colaborar, pensar de forma crítica y adaptar eficazmente los conocimientos y habilidades adquiridos en matemáticas a la solución de problemas que entienden en diversos contextos.

En todos los grados, de primero a duodécimo, el rendimiento de los alumnos se proyecta en tres áreas de logro: comprensión y razonamiento profundos, comunicación matemática y resolución de problemas.

Sin embargo, aunque el programa nacional de matemáticas enfatiza la importancia del desarrollo de la competencia de pensamiento creativo, la mayoría de las lecciones de matemáticas son del tipo estándar: tareas y trabajos de libros de texto/manuales, las soluciones son explicadas por el profesor, por ejemplo, un extracto del libro de texto para el 9º grado:

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



8

5 Kvadratinės lygtys

5.2. LYGTIS $ax^2 + bx = 0$

Šiame atverstinyje išmoksime spręsti kvadratines lygtis, kurios neturi laisvojo nario, t. y. lygtis $ax^2 + bx + c = 0$, kuriose $c = 0$.

Užduotis. Imkime kvadratines lygtis, neturinčias laisvojo nario, pavyzdžiui: a) $x^2 + 5x = 0$; b) $x^2 - x = 0$; c) $2x^2 + 8x = 0$.

Išspręskite kiekvieną tą lygtį, kairiąją jos pusę skaidydami dauginamaisiais.

Išspręskime lygtį $x^2 + 2x = 0$. Prisiminkime, kad $a^2 + ab = a(a + b)$

1) Pastebėkime, kad kairiąją lygties pusę x^2+2x galima išskaidyti dauginamaisiais. $x \cdot x + 2 \cdot x = 0$, $x \cdot (x + 2) = 0$

2) Sandauga lygi 0 tik tada, kai bent vienas iš dauginamųjų (x ar $x + 2$) lygus 0. $x = 0$ arba $x + 2 = 0$

3) Randame x reikšmes, su kuriomis tie dauginamieji lygūs 0. $x = 0$ arba $x = -2$

Nustatėme, kad yra dvi x reikšmės ($x = 0$ ir $x = -2$), su kuriomis lygtis $x^2 + 2x = 0$ virsta teisinga lygybe.

4) *Pasitikriname.*

- Kai $x = 0$, tai $0^2 + 2 \cdot 0 \stackrel{?}{=} 0$, $0 = 0$ – lygybė *teisinga*.
- Kai $x = -2$, tai $(-2)^2 + 2 \cdot (-2) \stackrel{?}{=} 0$, $4 - 4 = 0$ – lygybė *teisinga*.

Vadinasi, lygtis $x^2 + 2x = 0$ turi du sprendinius: $x = 0$ ir $x = -2$.

5) Parašome atsakymą. *Atsakymas.* $x = 0$, $x = -2$.

$x^2 - 2x = 0$,
$x \cdot (x - 2) = 0$,
$x = 0$ arba $x - 2 = 0$,
$x = 2$. Atsakymas. $x = 0$, $x = 2$.

Lygties $ax^2 + bx = 0$ sprendinius galima apskaičiuoti reiškinį $ax^2 + bx$ skaidant dauginamaisiais!

9

6. Kairiąją lygties pusę skaidydami dauginamaisiais, išspręskite lygtį:
a) $x^2 + 4x = 0$; b) $y^2 - 12y = 0$; c) $-2z^2 + 8z = 0$;
d) $x^2 + 4{,}6x = 0$; e) $y^2 - 7{,}02y = 0$; f) $-z^2 - 3{,}4z = 0$;
g) $x^2 + \frac{1}{3}x = 0$; h) $y^2 - \frac{4}{5}y = 0$; i) $-5z^2 + 4\frac{2}{7}z = 0$.

7. Raskite lygties sprendinius.
a) $x^2 = 12x$; b) $y^2 = -8y$; c) $-3z^2 = 4z$;
d) $x^2 = 0{,}2x$; e) $y^2 = 1{,}3y$; f) $-2z^2 = -2{,}8z$;
g) $x^2 = \frac{2}{15}x$; h) $y^2 = -\frac{6}{13}y$; i) $-z^2 = -4\frac{1}{5}z$.

Pirmiausia pasiekite, kad dešinėje lygties pusėje būtų tik 0, t. y. lygtį parašykite taip: $ax^2 + bx = 0$. Pavyzdžiui,
$3x^2 = 4x \mid -4x$, $3x^2 - 4x = 0$.

8. Trys draugai sprendė kvadratinę lygtį $-2x^2 + 6x = 0$.

Rimas	*Simas*	*Jonas*
$-2x^2 + 6x = 0$,	$-2x^2 + 6x = 0$,	$-2x^2 + 6x = 0 \mid : (-2)$,
$x \cdot (-2x + 6) = 0$,	$-2x \cdot (x - 3) = 0$,	$x^2 - 3x = 0$,
$x = 0$ arba $-2x + 6 = 0$,	$-2x = 0$ arba $x - 3 = 0$,	$x(x - 3) = 0$,
$-2x = -6$,	$x = 0$, $x = 3$.	$x = 0$ arba $x - 3 = 0$,
$x = 3$.		$x = 3$.

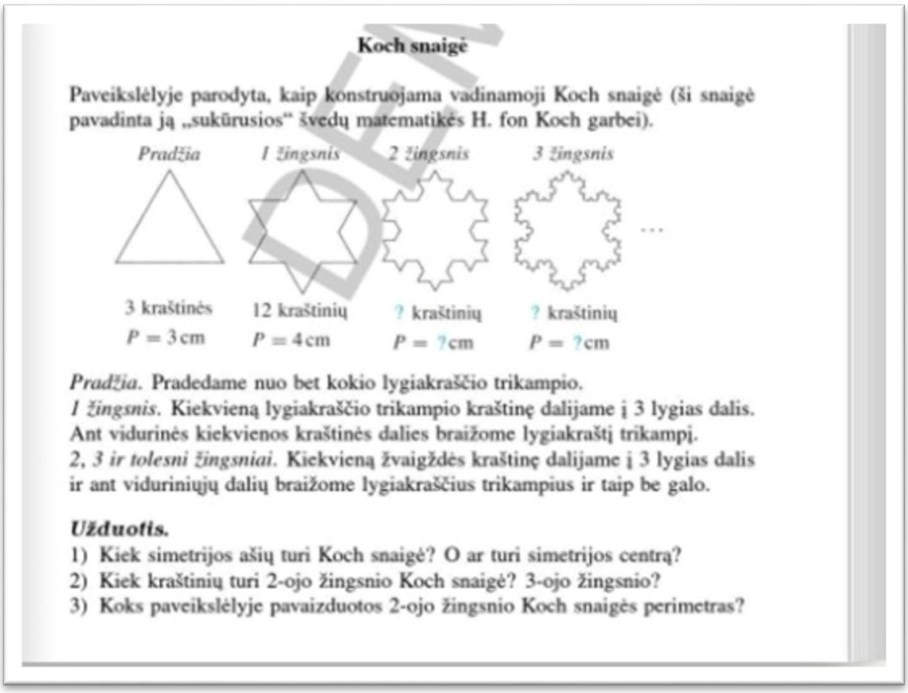
1) Kuris sprendimas jums priimtiniausias?
2) Išspręskite kvadratinę lygtį jums patogiu būdu.
a) $3x^2 - 6x = 0$; b) $4y^2 + 8y = 0$; c) $5z^2 - 15z = 0$;
d) $-2x^2 + 16x = 0$; e) $-12y^2 - 24y = 0$; f) $-6z^2 + 42z = 0$;
g) $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 0$; h) $-\frac{1}{3}y^2 + 8y = 0$; i) $12z = -\frac{1}{12}z^2$;
j) $-8x = -\frac{1}{4}x^2$; k) $7y = -\frac{1}{4}y^2$; l) $-\frac{1}{3}z^2 = \frac{4}{5}z$.

9. Su kuriomis y reikšmėmis duotojo dvinario reikšmė lygi 0?
a) $\frac{2}{3}y^2 + 1{,}4y$; b) $0{,}3y + \frac{1}{2}y^2$; c) $4{,}2y^2 - 3{,}2y$; d) $-y^2 - y$.

10. Nežinomą skaičių pažymėkite x. Tada sudarykite duotąjį sakinį atitinkančią lygtį. Apskaičiuokite tos lygties sprendinius.
a) Nežinomo skaičiaus kvadratas lygus trečdaliui to nežinomo skaičiaus.
b) Du trečdaliai nežinomo skaičiaus lygūs vienam ketvirtadaliui to nežinomo skaičiaus kvadrato.
Atsakyme nurodykite teigiamąjį nežinomą skaičių.

Aunque las tareas matemáticas pueden tener aspectos prácticos, como en el ejemplo de la tarea matemática para alumnos de 8º curso. Se les explicó cómo se hace el copo de nieve Koch (aunque no se les pidió que lo hicieran ellos mismos) y luego se les pidió que calcularan varios parámetros. Otras tareas pueden pedir que se encuentre una solución para una situación concreta de la vida, mencionada en la tarea, por ejemplo, que se calcule la distancia, etc.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Koch snaigė

Paveikslėlyje parodyta, kaip konstruojama vadinamoji Koch snaigė (ši snaigė pavadinta ją „sukūrusios" švedų matematikės H. fon Koch garbei).

Pradžia	*1 žingsnis*	*2 žingsnis*	*3 žingsnis*
3 kraštinės	12 kraštinių	? kraštinių	? kraštinių
$P = 3$ cm	$P = 4$ cm	$P = ?$cm	$P = ?$cm

Pradžia. Pradedame nuo bet kokio lygiakraščio trikampio.
1 žingsnis. Kiekvieną lygiakraščio trikampio kraštinę dalijame į 3 lygias dalis. Ant vidurinės kiekvienos kraštinės dalies braižome lygiakraštį trikampį.
2, 3 ir tolesni žingsniai. Kiekvieną žvaigždės kraštinę dalijame į 3 lygias dalis ir ant viduriniųjų dalių braižome lygiakraščius trikampius ir taip be galo.

Užduotis.
1) Kiek simetrijos ašių turi Koch snaigė? O ar turi simetrijos centrą?
2) Kiek kraštinių turi 2-ojo žingsnio Koch snaigė? 3-ojo žingsnio?
3) Koks paveikslėlyje pavaizduotos 2-ojo žingsnio Koch snaigės perimetras?

Figure 10: Example of active learning methods

También existen métodos de aprendizaje activo: trabajo en grupo, investigación de proyectos, concursos, debates, adaptación de herramientas informáticas (creación de mapas mentales, cuestionarios, juegos de lógica, crucigramas, uso de figuras 3D, etc.). Sin embargo, dado que los exámenes de matemáticas son de forma escrita con mucho cálculo, la principal tarea de los profesores de matemáticas es dar a los alumnos la comprensión y las habilidades de cómo calcular rápidamente y así resolver el mayor número de tareas posible. A los alumnos de primaria se les asignan tareas más activas porque hay más tiempo y libertad para trabajar en tareas creativas: dibujar, hacer varias figuras, etc.

La importancia y las formas de hacer que la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas sean más envolventes y creativos, se analizan desde hace décadas en la literatura científica: por ejemplo, cómo dibujar un gato utilizando las líneas y las funciones (para los estudiantes de 9º grado) Biekšienė, R., ir Zenkevičienė M. (2000). Aktyvaus mokymosi metodai matematikos pamokose. α+ώ, Nr. 2, 52-56 (Figure 11):

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

I koordinatiniame ketvirtyje:

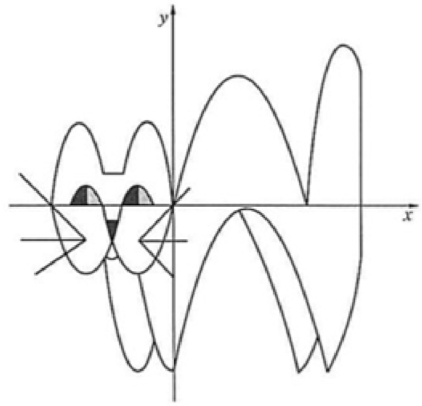
1) $y = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 8$, kai $0 \leqslant x \leqslant 8$;
2) $y = -2(x-10)^2 + 10$, kai $7{,}8 \leqslant x \leqslant 11$;
3) $x = 11$, kai $0 \leqslant y \leqslant 8{,}2$;
4) $y = x$, kai $0 \leqslant x \leqslant 1$;
5) $y = -2(x+1{,}5)^2 + 5{,}2$, kai $0 \leqslant x \leqslant 0{,}2$.

II koordinatiniame ketvirtyje:

1) $y = -x - 7$, kai $-9 \leqslant x \leqslant -7$;
2) $y = -2(x+1{,}5)^2 + 5{,}2$, kai $-2{,}8 \leqslant x \leqslant 0$;
3) $y = -2(x+5{,}5)^2 + 5{,}2$, kai $-7{,}2 \leqslant x \leqslant -4$;
4) $y = 2$, kai $-4 \leqslant x \leqslant -2{,}8$;
5) $y = -2(x+2)^2 + 1{,}2$, kai $-2{,}8 \leqslant x \leqslant -1{,}2$;
6) $y = -2(x+5)^2 + 1{,}2$, kai $-5{,}8 \leqslant x \leqslant -4{,}2$;
7) $y = 0$, kai $-5{,}8 \leqslant x \leqslant -4{,}2$;
8) $y = -5$, kai $0 \leqslant x \leqslant 1{,}2$ (nuspalvinkite dešiniąją akies pusę pilkai, o kairiąją — juodai);
9) $y = 0$, kai $-2{,}8 \leqslant x \leqslant -1{,}2$;
10) $x = -2$, kai $0 \leqslant x \leqslant 1{,}2$ (nuspalvinkite dešiniąją akies pusę pilkai, o kairiąją — juodai).

III koordinatiniame ketvirtyje:

1) $y = (x+2)^2 - 4$, kai $-4 \leqslant x \leqslant 0$;
2) $y = (x+5)^2 - 4$, kai $-7{,}2 \leqslant x \leqslant -3$;
3) $y = -1$, kai $-3{,}8 \leqslant x \leqslant -3{,}2$ (nuspalvinkite nosį juodai);
4) $y = 2(x+3{,}5)^2 - 3$, kai $-3{,}8 \leqslant x \leqslant -3{,}2$ (nuspalvinkite liežuvį pilkai);
5) $y = 2x^2 - 10$, kai $-1{,}8 \leqslant x \leqslant 0$;
6) $y = 2(x+2)^2 - 10$, kai $-4 \leqslant x \leqslant -1$;
7) $y = -2$, kai $-9 \leqslant x \leqslant -5$, $-2 \leqslant x \leqslant 0$;



8) $y = x$, kai $-2 \leqslant x \leqslant 0$;
9) $y = -x - 4$, kai $-2 \leqslant x \leqslant 0$;
10) $y = -x - 7$, kai $-7 \leqslant x \leqslant -5$;
11) $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$, kai $-8 \leqslant x \leqslant -5$.

IV koordinatiniame ketvirtyje:

1) $y = -\frac{1}{2}(x-4{,}5)^2$, kai $0 \leqslant x \leqslant 9$;
2) $y = -\frac{1}{2}(x+2{,}5)^2 + 1$, kai $4 \leqslant x \leqslant 7{,}4$;
3) $y = 2(x-9)^2 - 10$, kai $9 \leqslant x \leqslant 11$;
4) $x = 11$, kai $-3 \leqslant y \leqslant 0$;
5) $y = 2(x-7{,}4)^2 - 10$, kai $7{,}4 \leqslant x \leqslant 8{,}5$;
6) $y = -2$, kai $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Figure 12: Example of creative thinking wit graphs

En 2020, sólo el 67,61% de los candidatos en Lituania aprobaron el examen de matemáticas (en comparación con el 82,09% de 2019). Esto revela una importancia significativa para adaptar un enfoque de aprendizaje más enactivo para obtener una mejor comprensión de las matemáticas porque los estudiantes de secundaria que fracasaron enfatizan que siempre fueron malos en las clases de matemáticas y no piensan que necesiten muchas matemáticas en su vida posterior. Además, el profesorado de matemáticas debería adoptar un enfoque más sistemático respecto a la enseñanza enactiva de las matemáticas para ayudar al estudiantado a comprender la importancia de las matemáticas en su vida y entrenar sus competencias en la resolución de problemas basados en las matemáticas.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

3.4. Filosofía Española

En general, los colegios en España ya sean privados o públicos, tienen un modelo de enseñanza similar en el que el aprendizaje enactivo no tiene tanta cabida como pudiera tenerlo en los otros países socios. Tras una búsqueda exhaustiva de colegios que impartan enseñanza con enfoque enactivo, apenas hemos encontrado instituciones que lo utilicen en su proceso de enseñanza. En este sentido, el enfoque que más se asemeja al aprendizaje enactivo es el Método Montessori, cada vez más utilizado en España.

Es cierto que se ha producido un cambio en la pedagogía de muchos institutos y colegios, ya que cada vez es más frecuente encontrar escuelas alternativas con una enseñanza más centrada en la persona y en el aprendizaje de las emociones y el desarrollo de otras inteligencias, ampliando el enfoque más allá de los conocimientos teóricos que siempre han existido siempre en la escuela. De esta manera y siguiendo lo mencionado anteriormente sobre la falta de uso del enfoque enactivo en las escuelas españolas pero la creciente apertura en la pedagogía, el proyecto EnLeMaH tiene sentido en España. Tiene cabida para el profesorado, que constantemente intentan abrir nuevas formas de mirar y acercarse a al alumnado, por lo que este Proyecto les dará nuevas herramientas que han sido probadas en otros países y tienen éxito.

Algunos colegios e institutos españoles están empezando a innovar con el aprendizaje basado en proyectos, en el que se valoran cada vez más las competencias transversales y la creación y el trabajo en grupo de los contenidos a aprender. Algunos de los colegios e institutos destacados en España por sus innovaciones son:

- Escuela Ideo, Madrid: trabajan mediante el modelo de aprendizaje basado en proyectos. El trabajo en grupo para aprender y el aprender haciendo son dos de sus ejes.
- Fundación Myland, Sevilla: este colegio está construyendo actualmente el edificio que albergará la escuela secundaria. Su pedagogía se basa en el aprendizaje experimental, lo que facilita que el alumnado adquiera conocimientos a través del aprendizaje práctico.
- Colegio San Gregorio, Plasencia: Centro educativo concertado para edades de 0 a 18 años. El objetivo de su profesorado es estructurar el aprendizaje a través de proyectos y metodologías activas. Se fomenta la educación emocional y en educación primaria se utiliza la metodología *Héroes Tic*, que convierte a los alumnos en protagonistas de su experiencia de aprendizaje. La nota dominante

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

es que se utilizan grupos cooperativos y se registran los progresos de los niños en los blogs digitales de los alumnos.

- Colegio Amara Berri: La metodología educativa del centro cuenta con programas de ciclo por edades y se cuida especialmente el enseñar a los alumnos formas de organizar su pensamiento y métodos para su desarrollo, además de trabajar la autoestima de los alumnos y fomentar el trabajo en equipo. La gamificación y la aplicación práctica de los conocimientos teóricos también juegan un papel importante.

Hay muchas escuelas Montessori en España, pero la enseñanza suele ser hasta los 12 años, por lo que, aunque el método es muy similar al del Aprendizaje Activo, el rango de edad no es el mismo.

En conclusión, por tanto, el proyecto EnLeMaH tendrá un impacto muy significativo y necesario en la pedagogía del sistema español, ya que proporcionará al profesorado numerosas herramientas y consejos para poder adaptar sus contenidos a las necesidades de aprendizaje de sus alumnos, haciendo que su enseñanza sea mucho más significativa de lo que ha sido hasta ahora.

3.5. Conclusión

Como se menciona en la filosofía específica de cada país, pueden observarse diferencias en la forma de fundar el aprendizaje activo en la escuela. Las diferencias pueden estar más en la forma de implementar el aprendizaje activo que en la forma de subrayar la necesidad del aprendizaje activo en la escuela. En todos los países, el proceso de integración del profesorado en esta filosofía es una cuestión importante para establecer el aprendizaje enactivo en la escuela. En este ámbito, el proyecto EnLeMaH forma parte de la estrategia y la filosofía de cada país.

4. EnLeMaH and the criteria for an enactive work.

Teniendo de base los capítulos 1 y 3, los siguientes criterios para el aprendizaje enactivo de EnLeMaH serán la base para la creación de situaciones de aprendizaje enactivo. De esta manera, los aspectos del modo de representación enactiva, el punto de vista experimental y la filosofía del aprendizaje enactivo se agruparán en los siguientes criterios:

- Objeto real: Los entornos de aprendizaje deben contener objetos reales. (Las actividades basadas en el ordenador (como GeoGebra) no se consideran una actividad enactiva).
- Actividad: La acción es un proceso activo. Los alumnos no deben ser receptores pasivos, sino participar activamente en el proceso de aprendizaje

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

(por ejemplo, observar un experimento, pero no realizarlo ellos mismos). Los alumnos deben ser activos en cada paso de una actividad.

- Lección: Las actividades enactivas pueden formar parte de cada etapa de la clase (por ejemplo, introducción, aprendizaje de nuevos contenidos, automatización, conclusión...)
- Material: el alumnado debe tener acceso a cosas tangibles en casa (o en clase).
- Configuración de actividades enactivas en casa: Síncrona (en directo) y asíncrona (autoaprendizaje sin presentación en directo). La configuración del aprendizaje enactivo en casa tiene, junto al material tangible, la oportunidad de permitir a los profesores crear diferentes tipos de entornos de aprendizaje a distancia.

5. La plantilla de EnLeMaH

La siguiente plantilla servirá como base para crear actividades enactivas. De este modo, se tendrán en cuenta los aspectos de la enseñanza práctica y un uso fácil de esta actividad para el profesorado de otros países o de fuera del proyecto EnLeMaH. La plantilla permite al profesorado comprender y adaptar las actividades a sus propias clases.

Tabla 7: la plantilla de EnLeMaH

Nombre de la actividad
Resumen (en la lengua materna)
Resumen (en inglés)
Objetivo de la tarea (introducción, ejercicio, repetición...)
Objetivos del aprendizaje

Conocimientos previos del alumnado
Lista de materiales
Tiempo aproximado de duración
Tiempo aproximado de preparación
Breve descripción de la actividad (la descripción debe dividirse en pocas partes, según las tareas. Hay que prever la duración de cada tarea)
Ejercicios para los estudiante (debe estar escrito en un documento separado)
Solución del ejercicio (debe redactarse en un documento aparte)
Observaciones (pistas, dificultades, gestión del aula, diferenciación, posibilidades de ampliar la actividad)

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

References

Brown, L. (2015). Researching as an enactivist mathematics education researcher. *ZDM Mathematics Education, 47*, 185–196.

Bruner, J. S. (1966). Toward a theory of instruction. Cambridge, Mass.: Belkapp Press.

Coles, A., & Brown, L. (2013) Making distinctions in task design and student activity. In C. Margolinas (Ed.) *Task design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22* (pp. 183–192). https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054

Di Paolo, E. (2018)."Enactivismo". *En Diccionario Interdisciplinar Austral, editado por Claudia E. Vanney, Ignacio Silva y Juan F. Franck.* URL=http://dia.austral.edu.ar/Enactivismo

Francis, Krista & Khan, Steven & Davis, Brent. (2016). Enactivism, Spatial Reasoning and Coding. Digital Experiences in Mathematics Education. 2. 10.1007/s40751-015-0010-4.

Maturana, H., & Varela, F. (1992). *The Tree of Knowledge: The biological roots of human understanding.* Boston MA: Shambhala. (First edition published 1987).

Maturana, H. (1987), “Everything is Said by an Observer”, en W. I. Thompson (ed.), GAIA, A Way of Knowing: Political Implications of the New Biology, Hudson, N.Y., Lindisfarne Press, pp. 65-82.

Lozano, María Dolores (2014). La perspectiva enactivista en educación matemática: todo hacer es conocer. *Educación Matemática*, 162-182. [Fecha de consulta 11 de Octubre de 2021]. ISSN: 0187-8298. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540854009

Reid, D. (1996). Enactivism as a methodology. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the twentieth annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 203–210). Valencia: PME.

Schunk, D. (2012). *Learning theories.* An educational perspective. Boston, Mass: Pearson.

Varela, F., Thompson, E., & Rosch, E. (1991). *The embodied mind: cognitive science and human experience.* Cambridge: MIT Press.

This project has been funded with support from the European Commission. This publication [communication] reflects the views only of the author, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.