Aktyvaus matematikos mokymosi namuose gairės

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai.
Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

UNIVERSITÄT BIELEFELD
Faculty of Mathematics

incoma

uniri

ST. IGNATIUS OF LOYOLA
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Turinys

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

1. Aktyvaus mokymo(si) praktikos teoriniai pagrindai

1.1. Įvadas

Aktyvaus požiūrio į matematikos mokymą įdiegimas padeda mokiniams sukurti protinį tinklą suprasti matematines sąvokas ir ryšius bei kaip jie gali panaudoti matematiką savo kasdieniame gyvenime ir darbe. Aktyvus mokymasis – tai rankų darbo veikla, eksperimentai ir konkretus darbas su medžiaga, siekiant įvesti naujas matematines temas, matematinį turinį ir atrasti matematinius ryšius..

Aktyvios metodikos padeda didinti matematikos supratimą ir patrauklumą [...] ir, platesniu mastu, padeda sumažinti prastus rezultatus. Nepaisant to, aktyvaus požiūrio į matematiką priėmimas grindžiamas dviem pagrindinėmis prielaidomis.

Viena vertus, mokytojai turi įgyti ir turėti reikiamų pedagoginių įgūdžių, kad galėtų įgyvendinti šią metodiką, ypač kai tai susiję su jos pritaikymu skaitmeninio švietimo ir mokymo kontekste. Kita vertus, dabartinėmis sąlygomis, kurias stipriai paveikė COVID-19 krizė, gali būti sunku gauti aktyviosios medžiagos, ypač atsižvelgiant į tai, kad kelis mėnesius mokyklos buvo uždarytos, o mokymas buvo vykdomas nuotoliniu būdu..

„EnLeMaH“ siekia skatinti matematikos mokytojų inovatyvių skaitmeninių pedagoginių kompetencijų perėmimą, kurios leis jiems tobulinti žinias ir įgūdžius:

a) Įdiegti aktyvią mokymo ir mokymosi metodiką, pritaikytą skaitmeninio ugdymo kontekstui, kuri padėtų matematiką padaryti patrauklesnę moksleiviams (12–16 metų);
b) Padėti mokiniams kurti ir naudoti namų apyvokos reikmenis, aktyvią medžiagą, kuri palaiko jų mokymosi procesus, ypatingą dėmesį skiriant matematikos mokymuisi funkcijų srityje..

Šiuo tikslu EnLeMaH išskiria tris pagrindinius projekto etapus. Pirmoji fazė (1 intelektualinė produkcija) apibrėžiama kuriant teorinę sistemą, kuria vėliau būtų galima pagrįsti EnLeMaH kursą, skirtą vidurinių mokyklų matematikos mokytojams. Antrasis projekto etapas (2 intelektualinis rezultatas) susideda iš mokymo priemonių ir medžiagos, skirtos mokytojų rengimo kursui, sukūrimas. Trečiasis etapas (3 intelektualioji produkcija), lygiagrečiai su antruoju etapu, yra šių mokymosi vienetų struktūrizavimas internetinio kurso, EnLeMaH mokytojų mokymo kurso, forma..

Taigi šiame dokumente „Aktyvaus mokymosi namuose gairės“ (1 intelektualinis rezultatas) pateikiami šie aspektai:

● teorinis požiūris į aktyvizmą, pagrįstas autoriais Maturana, Varela, Brown ir kognityvinio augimo teorija, įskaitant Brunerio vaizdavimo būdus.

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

● jo pasekmės matematinio turinio mokymui/mokymuisi iš aktyvios perspektyvos;
● matematinio mokymo turinio (12–16 metų) apžvalga įvairiose šio projekto šalyse partnerėse;
● tradicijų, kurias kiekviena projekto šalis turi aktyvių matematikos mokymo metodų atžvilgiu, santrauka ir, galiausiai,
● kriterijai, kuriuos EnLeMaH nustato, kad būtų galima priskirti veiklą kaip aktyvią. Kartu su šiais kriterijais EnLeMaH siūlo šabloną, kuriuo tikslinga vadovautis kuriant naujas aktyvias mokymosi veiklas.

1.2. Principai tyrinėjant kaip aktyvistui

Šiame skyriuje apžvelgsime ryšį tarp tyrimo ir mokymo. EnLeMaH projekto tikslai yra esminiai mokymosi ir mokymo supratimui aktyviose situacijose. Mūsų požiūris į bendradarbiavimą kuriant aktyvias idėjas yra grįstas Browno (2015) tyrimo principais. Šiame skyriuje supažindinsime su trimis jo principais.

1.2.1. 1 principas. Žinojimo/darymo pasekmės

> Aktyvistinės teorijos kuriamos remiantis biologiniu būties pagrindu, o aktyvus požiūris susideda iš dviejų punktų (Brown, 2015):
> • Suvokimas susideda iš suvokimu grindžiamo veiksmo ir
> • Kognityvinės struktūros atsiranda iš pasikartojančių sensomotorinių modelių, kurie leidžia suvokti veiksmus (Varela ir kt. 1991, p. 172–173).

Taigi, „žinoti yra daryti, mokytis yra būti“. Mes tiesiogine prasme esame tai, ką darome, mūsų aplinka sukūrė mus taip, kaip mes sukūrėme savo pasaulį. (Brown, 2015).

> Tai nėra individuali pažinimo struktūra. Esame atsirandantys kartu ir, kur yra veiksmų koordinavimas, pavyzdžiui, klasėje ar bendradarbiavimo grupėje tyrimo projekte, atsiranda praktikos kultūra, kuri yra *pakankamai gera* (efektyvus veiksmas), kad būtų padaryta tai, ką reikia padaryti (Brown, 2015, p.189).

Tada mes, kaip bendradarbiaujanti tyrėjų ir dėstytojų grupė, galime dalytis savo patirtimi apie mokymąsi ir mokymą, galime rašyti ir diskutuoti, kad gautume galutines išvadas (1 pav.)

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

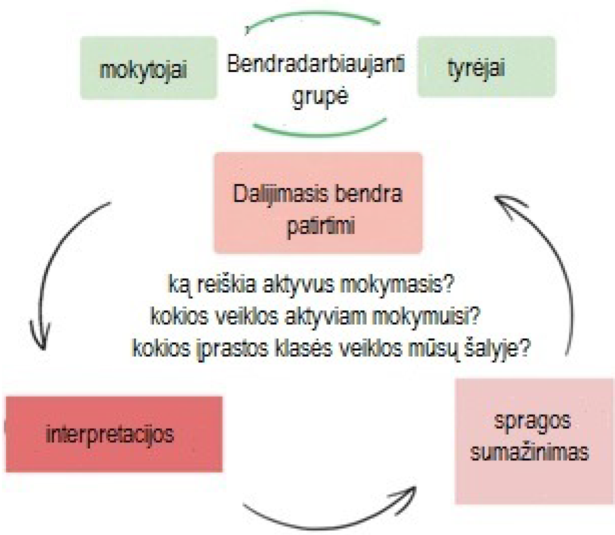
1 Paveikslas. Bendradarbiaujančios grupės dalijimasis patirtimi

1.2.2. 2 principas: konstrukcinio susiejimo istorija

Maturana ir Varela (1992, p. 75) kalba apie „struktūrinį susiejimą, kai yra pasikartojančių sąveikų istorija, vedanti į struktūrinį dviejų (ar daugiau) sistemų sutapimą“. Tai reiškia, kad kito išreikštas poreikis skatina padėti patenkinti mano poreikius.

Kaip galime panaudoti struktūrinio susiejimo idėją bendradarbiavimo grupėse?

- Nėra tikrumo dėl mokymo ir mokymosi, bet…
- Tai, ką patiriame savo veiksmais, yra interpretacija, todėl…
- „Du žmonės negali matyti to paties dalyko ir negali turėti to paties suvokimo. Tačiau mes galime bendrauti, nes galime kalbėti apie bendrų patirčių detales ir tokiu būdu galima sumažinti atotrūkį tarp interpretacijų“ (Brown, 2015, p.189).



2 Paveikslas. Bendradarbiaujanti grupė aktyviame mokymesi

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

Taigi, kai galime pasidalinti savo patirtimi ir diskutuoti remdamiesi mūsų projektui reikalingais klausimais, atotrūkis tarp mūsų interpretacijų susiaurėja ir užleidžia vietą bendrai vizijai..

1.2.3. 3 ir 4 principai: įvairios perspektyvos ir efektyvūs veiksmai

„Svarba dirbti iš kelių perspektyvų ir su įvairiomis perspektyvomis bei kurti modelius ir teorijas, kurios yra pakankamai tinkamos, o ne galutinės“ (Reid 1996, p. 207). "Efektyvus“ yra techninis žodis aktyvistinėse idėjose, susietas su pažinimo struktūromis ir mokymusi „efektyvus“ veiksmai buvo naudojami kaip „pakankamai geri“ vaikams mokytis matematikos ir padėti naujiems mokytojams apmąstymuose ir tyrimuose.

Bendradarbiaujančios tyrėjų/mokytojų grupės nariai siekia ne „atsakymų“, oi išplėsti galimų veiksmingų praktikų spektrą. Tolesniuose skyriuose šis diapazonas bus tikslesnis reprezentacijų ir aktyvaus mokymosi biologinio pagrindo srityje..

1.3. Kognityvinio augimo teorija pagal Jerome S. Bruner

> Būtų naudinga išskirti tris informacijos apdorojimo sistemas, kuriomis žmonės kuria savo žodžio modelius: per veiksmą, per vaizdinius ir per kalbą (Bruner 1965, p.1)..

Kaip Bruneris teigė aukščiau, asmenys vaizduoja savo mokymąsi ir pasaulį, kuriame jie gyvena, veikdami, jei negali to padaryti naudodami vaizdus ar žodžius. Jis manė, kad bet kurį dalyką galima dėstyti bet kuriame raidos etape taip, kad būtų patenkinti pažintiniai gebėjimai. Norint išmokti aukštesnės kvalifikacijos veiklą, ji turi būti „išskaidyta į paprastesnius komponentus, kurių kiekvieną gali atlikti mažiau kvalifikuotas operatorius“ (Bruner 1964, p. 2). Reprezentacijos yra galutinis praeities patirties kodavimo ir apdorojimo sistemos produktas. Taigi jis pristatė modelį, apimantį tris vaizdavimo būdus, kaip nurodyta 1 lentelėje). Jis tikėjo, kad žmonės savo žinias reprezentuoja šiais trimis būdais. Reprezentacijų būdai „nėra struktūros, o veikiau apima įvairias pažinimo apdorojimo formas“ (Schunk 2012, p.457).

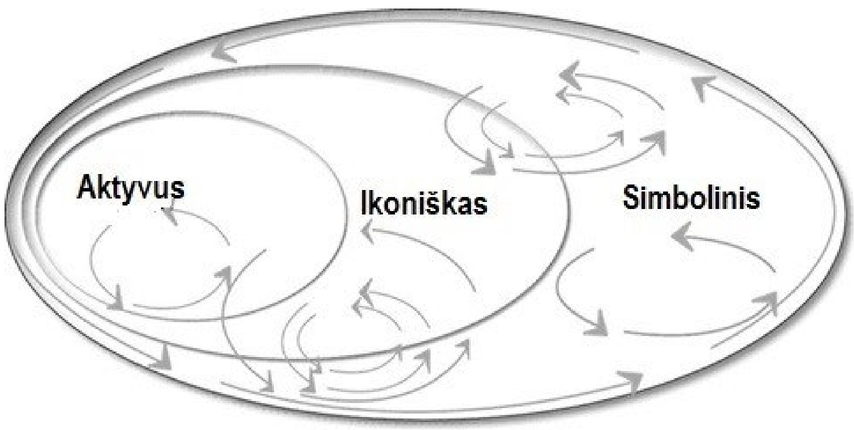
Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

1 Lentelė. Atvaizdavimo būdai
i

Atvaizdavimo būdo pavadinimas		Apibūdinimas	Pavyzdžiai matematikos klasėje
Aktyvus vaizdavimo būdas		Siūlo, kad asmenys per veiksmą reprezentuotų savo mokymąsi ir pasaulį, kuriame jie gyvena, jei negali naudoti vaizdų ar žodžių. Mokinys geriausiai supranta savo aplinką sąveikos su jį supančiais objektais metu	Medžiagos naudojimas matematinės sąvokos reprezentavimui. 
Ikoninis vaizdavimo būdas		Apibendrina įvykius selektyviu priesakų ir vaizdinių organizavimu, erdvinėmis, laiko ir kokybinėmis suvokimo lauko struktūromis ir jų transformuotais vaizdais.	Vaizdų (pvz., (matematinės) situacijos paveikslėlių, grafikų) naudojimas matematinės sąvokos pavaizdavimui
Simbolinis vaizdavimo būdas	Žodinis-simbolinis	Kiekvienas žodis turi fiksuotą ryšį su tuo, ką jis reprezentuoja	(Ištarto) žodžio naudojimas matematinės sąvokos pavaizdavimui
	Neverbalinis-simbolinis	Kiekvienas simbolis turi fiksuotą ryšį su tuo, ką jis reprezentuoja	Rašytų sakinių ir matematinių simbolių (pvz., lygčių) naudojimas matematinei sąvokai pavaizduoti

Aktyvaus mokymosi atveju šie vaizdavimo būdai atitinka mokymosi procesą (3 pav.). Aktyvios situacijos bus paverstos ikoniškais vaizdais ir atspindės tą situaciją. Aktyvumo ir (arba) ikoninio vaizdavimo pagrindas bus simbolinės transformacijos pagrindas ir atvirkščiai: simboliniai režimai bus atrasti ikoniniuose ir aktyviuosiuose režimuose.



3 Paveikslas. Aktyvus, ikoniškas ir simbolinis kaip įterptas į vienas kitą, implikuotas ir vienalaikis (Francis, Khan, David, 2016, p. 8)

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

Dėl to trys vaizdavimo būdai yra susiję su pagrindiniu EnLeMaH projekto teoriniu aspektu: Norint suprasti ir sukurti aktyvią mokymosi veiklą, skirtingų režimų atskyrimas yra pagrindas. Kitame skyriuje pažvelgsime į aktyvaus mokymosi kūrimo aspektus.

1.4. Aktyvus mokymasis: Biologiniai pagrindai

Pasak Di Paolo (2018), terminas aktyvus buvo vartojamas prieš biologinius pagrindus, kurie šiandien formuoja teoriją. Pavyzdžiui, Bruner (1966) vartojo terminą aktyvus, kad nustatytų ryšį tarp reprezentacijų ir kūno aspektų, priklausančių žmogaus išgyventai patirčiai. Šiuo metu aktyvizmo reikšmė grindžiama biologo Francisco Varelos (1946-2001) pradėtais darbais ir kartu su Maturana (1980, 1987) atliktais darbais. Šiandien šią teorinę perspektyvą toliau plėtoja įvairios tyrėjų grupės, orientuotos į skirtingas studijų sritis: Brown, L., 2011, 2012, 2015. Coles, A., 2013, 2015. Di Paolo., 2005, 2018. Lozano , MD. 2004 m., 2015 m.

Varela, Thompson ir Rosch (1991) vartojo žodžius „įgyvendinimas“ ir „aktyvus“, kad apibūdintų jų pateiktą nereprezentacinį pažinimo sąrašą, pažinimą kaip „įkūnytą veiksmą“. Tai reiškia du svarbius dalykus: (1) suvokimą sudaro perceptualiai valdomas veiksmas ir (2) kognityvinės struktūros atsiranda iš pasikartojančių sensomotorinių modelių, kurie įgalina veiksmo suvokimą (Varela ir kt., 1991, p. 172–173).

Todėl norėdami suprasti, kas yra veiksmas, turime suprasti, kas yra suvokimas. Svarbu pastebėti, kad suvokimas kartais vertinamas kaip pasyvus procesas (pvz., kai šviesa patenka į akis ir tu sugebi sukurti vaizdą), tačiau aktyvizme suvokimas yra aktyvus procesas, o be veiksmo nėra suvokimo. Kita vertus, šį aktyvų procesą lemia suvokėjo struktūra, pavyzdžiui: kaip paukštis suvokia tam tikrą situaciją, labai skiriasi nuo to, kaip ją gali suvokti žmogus.

Viena vertus, organizacija suprantama kaip ryšiai, kurie turi egzistuoti tarp kažko komponentų, kad būtų pripažinti konkrečios klasės nariu, o kita vertus, kažko struktūra suprantama kaip komponentai ir santykiai, kuriuos sudaro konkretus padalinys, kuris vykdo organizaciją (Lozano, 2014). Maturana ir Varela pabrėžia, kad gyvos būtybės yra sistemos, kurių struktūra nuolat kinta, tačiau jų organizacija išsaugoma (Maturana 1998a in Lozano, 2014). Tai atsitinka tam tikru organizavimo būdu, kurį jie vadina autopoeze. Todėl autopoetinė sistema yra tokia, kurios, nepaisant nuolatinio keitimo ir naujų etaloninių sistemų kūrimo, rezultatas visada bus tas pats. Pagal Matura (1987 m.) problema būtų, kaip spręsti struktūros kaitos problemą ir parodyti, kaip aplinkoje esantis ir adekvačiai pagal poreikius veikiantis organizmas gali patirti nuolatinius struktūrinius pokyčius, net ir aplinkai keičiantis. Taigi, tai galėtų būti apytikslis matematikos mokymo problemos sprendimas, matematikos studentas yra sistema, kuri kiekvieną akimirką susitvarko. Taigi kiekvieną kartą, kai jį pasiekia stimulas

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

(pavyzdžiui, matematinis simbolis), jis iš karto įtraukiamas į mokinio struktūrą, jo esybę.

Kita vertus, pasak Lozano (2014), kai gyvos būtybės sąveikauja su aplinka, kurioje yra kitos gyvos būtybės, ir vyksta pasikartojanti sąveika tarp dviejų sistemų, tada abi keisis panašiai. Žvelgiant iš šios perspektyvos, galėtume sakyti, kad matematikos mokiniui pakartotinai bendraujant su savo mokytoja/-u ir su kitais mokiniais, jie kartu sukurs sąveikos istoriją. Todėl visų dalyvaujančių šiuose užsiėmimuose struktūra gali keistis panašiai, sukurdama naujas bendravimo ir darbo formas. Jei taip neatsitiks, struktūriniai pokyčiai nelemia prisitaikymo prie aplinkos. Lozano (2014) pateikia aiškų pavyzdį: jei mokinys pakartotinai neišlaiko matematikos testų, tam tikrame kontekste tai gali reikšti, kad mokinys pakeičia studijų grupę, kurioje yra.

Svarbu paminėti tai, kad pasaulis yra ne kažkas, kas mums duota, o tai, su kuo mes bendraujame judėdami, liesdami, kvėpuodami ir valgydami – tai Maturana ir Varela pavadino pažinimą kaip aktyvų (Maturana ir Varela, 1992).). Taigi aktyvizmas rodo, kad mūsų protinė veikla (mintys, vaizdai, emocijos) yra pagrįsta veiksmuose, kuriuos atliekame su savo kūnu ir per savo kūną. Aktyvizmo požiūriu, mokymasis atsiranda mums aktyviai sąveikaujant su aplinka, todėl jo negalima laikyti informacijos įsisavinimu, o pažinimas nėra reiškinys, atsirandantis vieno individo galvoje ar kūne, o kylantis iš nuolatinės sąveikos su aplinka. aplinką, kurią savo ruožtu keičia šie faktoriai. Mūsų atveju visuomenė ir kultūra yra mūsų, kaip žmonių, aplinkos dalis.

Ši aktyvizmo samprata biologiniu požiūriu skatina mus pagalvoti apie veiklos, kuri pasirenkama siekiant nagrinėti turinį, turintį matematikos mokymosi tikslą, svarbą. Apskritai, yra daug medžiagos, kuria galime naudotis, tačiau turime atsižvelgti į kontekstą, kuriame mokiniai vystosi, į aplinkos tipą ir juos sudarančios struktūros tipą. Tai reiškia, kad turime stengtis sukurti užduočių modelius, atitinkančius mūsų mokinių lygį, kartu naudodami medžiagas, kurios leistų jiems panaudoti kūną kaip pagrindinį įrankį naujo mokymosi vystymuisi, taigi ir mokinių kuriamus vaizdus. kuriais veiklą moksleiviai gali patirti patys per savo veiksmus. Visa tai turi lydėti strategijos, leidžiančios gerai plėtoti klasės veiklą ir gerai valdyti aplinką, atsižvelgiant į individualias ir grupės ypatybes..

Taigi, pagrindinis veiklų, kurios turėtų būti rengiamos pagal šį EnleMaH projektą, tikslas turėtų atitikti biologinę aktyvizmo viziją, t. y. prasidėti nuo mokymosi tikslų, kuriuos galima pasiekti veiksmais, apimančiais kūną. Tada turėdami tuos pačius vaizdus ir reprezentacijas, kurias mokiniai kurs vykdydami veiklą, galime pasikliauti Brunerio teorija, kad mokinys atliktų reikiamas transformacijas, kad galėtų susieti savo vizualizacijas su kitais vaizdavimo būdais, nepamirštant fakto, kad individualias mokinio reprezentacijas pateikia jo paties suvokimas apie atliekamus veiksmus.

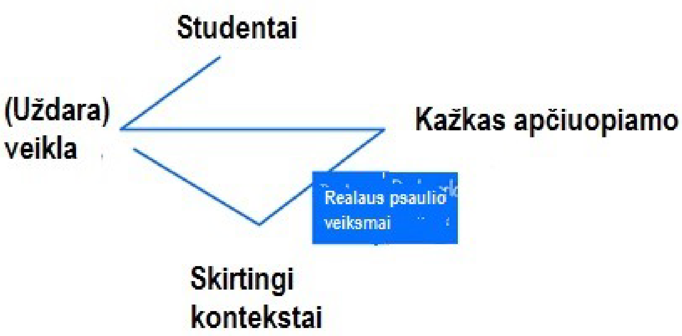
Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

Kitame skyriuje galime rasti nedideles gaires apie strategijas, kurias galima naudoti renkantis aktyvią veiklą ir kurios taip pat naudoja Bruner supratimą ir klaidingą supratimą, naudojant skirtingus vaizdavimo būdus.

1.5. Veiklos projektavimo principai ir aktyvios idėjos

1. Pradėti nuo (uždarytos) veiklos (kuri gali apimti naujo įgūdžio mokymą).
2. Apsvarstyti bent du kontrastingus pavyzdžius (jei įmanoma, vaizdus) ir atsakymų rinkimą „bendroje lentoje“.
3. Paprašytite mokinių pakomentuoti, kuo skiriasi kontrastingi pavyzdžiai ir (arba) užduoti klausimus.
4. Iššūkio paruošimas, jei nekyla klausimų.
5. Kalbos ir žymėjimo, kylančių iš mokinių skirtumų, supažindinimas.
6. Galimybės studentams pastebėti modelius, daryti spėjimus ir dirbti juos įrodant (taigi, apibendrinimas ir algebra).
7. Galimybės mokytojui toliau mokyti naujų įgūdžių, o mokiniams – praktikuoti įgūdžius įvairiuose kontekstuose.

Veikla, jei įmanoma, apims ką nors matomo ar apčiuopiamo ir ką gali atlikti visi mokiniai. Iššūkis ir galimybė mokyti įgūdžių įvairiuose kontekstuose yra susiję su žmonių galia. Kai ką nors darome skirtinguose kontekstuose, labiau tikėtina, kad sugebėsime įgyti įgūdžių ir pasilikti juos/naudoti kitą kartą (Coles ir Brown 2013, p. 186–187). Bent vienas galimas aktyvaus mokymosi apibrėžimo aproksimavimas: „mokymasis yra matyti daugiau, matyti kitaip rekursiniame procese, susijusiame su veiksmais pasaulyje, suteikiant grįžtamąjį ryšį, vedantį į pritaikytus veiksmus tol, kol elgesys taps efektyvus, t.y. nesukuriama trikdžių ir todėl veiksmas yra „pakankamai geras“, kad būtumėte pasaulyje“ (Brown, 2015, p.190). Iki šiol apžvelgėme biologinius aktyvaus mokymosi pagrindus, o 4 paveiksle parodytas galimas mokymosi kontekstas. Kitame skyriuje pamatysime, kaip aktyvios bazės gali būti susietos su Brunerio pasiūlytais vaizdavimo būdais, kurie ima aktyvumą kaip pagrindą parodyti, kaip pradeda vystytis žinios..



4 Paveikslas. Mokymosi kontekstas

Teorinis įnašas pirmuose trijuose skyriuose, kuriuose nagrinėjami skirtingi požiūriai į aktyvųjį mokymąsi: tyrėjo ir mokytojo ryšys, vaizdavimo būdas ir aktyvaus mokymosi projektavimo aspektai. Kitame skyriuje bus atsižvelgta į ypatingą veiklos rūšį: eksperimentą kaip pagrindinę aktyvaus mokymosi veiklą.

1.6. Eksperimentai

Eksperimentas yra mokslinis informacijos rinkimo metodas. Jis naudojamas mokykloje ir universitete, taip pat daugelyje dalykų. Tačiau tarp matematikos ir kitų dalykų eksperimentų yra skirtumas, kurį galima pamatyti pirmoje pastraipoje. Taigi matematiniai eksperimentai turi du skirtingus tikslus. Atskirus matematinių eksperimentų etapus galima pamatyti antroje pastraipoje.

1.6.1. Metodas „eksperimentas“ – skirtumai tarp tiriamųjų dalykų

Remiantis Kirchner ir kt., gamtos mokslų eksperimentų tikslai yra skirtingi: žinių rinkimas, reiškinių demonstravimas, „pirminės patirties“ suteikimas mokiniams arba ryšio ar modelio patikrinimas (plg. Kircher/Häußler/Girwidz, 2009). Visi šie tikslai leidžia geriau suprasti gamtą. Paprastai gamtos mokslų eksperimentui tenka iki šešių žingsnių. Iš pradžių reikia išsiaiškinti tyrimo objektą. Vėliau mokiniai turi rinkti hipotezes kaip antrą žingsnį. Trečias ir ketvirtas žingsniai – eksperimento planavimas ir vykdymas. Vykdant svarbu išmatuoti duomenis, norint juos išanalizuoti ir nustatyti koreliaciją tarp dydžių. Ši analizė yra penktasis žingsnis ir tik po jo seka paskutinis – rezultatų aiškinimas. Paskutiniame etape palyginami rezultatai ir hipotezės (plg. loc. cit.). Pats rezultatų aiškinimas dažnai veda prie kito tyrimo objekto - prie kito eksperimento. Nors eksperimentai skiriasi, pvz., „Ar mokiniai ar mokytojas atliks?“ arba „Kurioje pamokos fazėje eksperimentas integruojamas?“ (plg. Wiesner/Schecker/Hopf, 2017, p. 106–114), gamtos moksluose kiekvienas eksperimentas apima realius objektus.
Tarp matematinių eksperimentų ir gamtos mokslų eksperimentų yra panašumų ir skirtumų. Abiejų dalykų eksperimente aprašomas žinių rinkimo būdas stebint valdomus veiksmus su „objektais“ (plg. Ludwig/Oldenburg, 2007, p. 4). Matematikos eksperimentavimo procesas iš esmės yra identiškas gamtos mokslų procesui. Išnagrinėjus kelis pavyzdžius arba naudojant medžiagą, mokiniai pradeda kurti hipotezes, todėl antrąjį veiksmą galima pakeisti trečiuoju ir ketvirtuoju žingsniu. Kadangi reikia įrodyti matematinius faktus, šeštasis aiškinimo žingsnis siūlo prieiti prie formalaus įrodymo arba priveda prie eksperimento kartojimo su šiek tiek kitokiomis sąlygomis (plg. Philipp, 2012, p. 27 arba Goy/Kleine, 2015, p. 6).). Galiausiai matematinius eksperimentus galima atskirti nuo realių objektų (plg. 4 pastraipą). Taigi, eksperimentuodamas matematikoje, mokinys turi žinoti euristiką ir mokyti į procesą orientuotų kompetencijų..

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

1.6.2. Matematiniai eksperimentai kaip procesas

Kaip minėta anksčiau, matematikos eksperimentai yra skirtingų žingsnių ciklas. Remiantis Philipp (2012) ir Goy/Kleine (2015), yra keturi pagrindiniai matematinių eksperimentų žingsniai:

1. Matematinės problemos/klausimo išdėstymas
2. Hipotezių generavimas
3. Eksperimento planavimas, vykdymas ir analizė (trumpai: „bandymas“)
4. Matematinio modelio, koncepcijos ar įrodymo parengimas

Kiekvienam eksperimentui matematinė problema ar klausimas yra pirmasis, o modelio, koncepcijos ar įrodymo parengimas yra paskutinis žingsnis. Kitų žingsnių tvarka gali būti pakeista atsižvelgiant į eksperimento tikslą. Jei eksperimentu ketinama patikrinti ar suklastoti hipotezes, pirmiausia reikia sugeneruoti tas hipotezes. Jei eksperimentu siekiama, kad mokiniai išmoktų eksperimentuoti arba sudarytų savo modelius ir koncepcijas, bandymas turi būti atliktas prieš generuojant hipotezes (plg. Goy/Kleine, 2015, p. 5f). Nors ne visada būtina rinkti hipotezes prieš bandant.

Heintzas konstruoja tris matematinių eksperimentų kontekstus: atradimą, patvirtinimą ir įtikinėjimą (plg. Philipp, 2012, p. 25). Atradimo kontekstas yra susijęs su hipotezių generavimu ir yra sistemingas bandymas, siekiant ištirti neatpažintus ryšius. Čia žinios įgyjamos indukcijos būdu. Priešingu atveju žinios gaunamos išskaičiavus, kai matematiniu eksperimentu patvirtinama tam tikra hipotezė. Šiuo atveju eksperimentas nustatomas patvirtinimo kontekste. Galiausiai, jei nereikia nei atradimo, nei patvirtinimo, nes ryšys, koncepcija ar modelis jau patvirtintas, yra kitas matematinio eksperimento kontekstas: įtikinėjimas. Šiuo atveju eksperimentas turi įtikinti studentus (plg. loc. cit.).

Remiantis teoriniais pagrindais, EnLeMaH projekto veiklųjį mokymąsi galima apibūdinti kaip grįstą veiklą, kuri leidžia studentams atrasti matematinius ryšius arba įrodyti matematinius ryšius. Įvairios eksperimento fazės gali būti gairės mokytojams, remiantis projektavimo principais, surengti aktyvią mokymosi situaciją.

Norėdami tai padaryti, atsižvelgdami į aktyvumo idėją ir pagrindinę matematikos eksperimentų koncepciją, toliau pažvelgsime į kiekvienos šalies, kuri yra integruota kuriant EnLeMaH projektą, mokyklų programas, kad būtų užtikrintas tinkamas kontekstas , kuris bus perkeliamas į atitinkama mokyklų sistemą.

2. Trumpa mokymo programų santrauka

EnLeMaH projekte dalyvauja tyrinėjai ir mokytojai iš keturių skirtingų šalių. Šio projekto tikslas – sukurti aktyvias mokymosi situacijas funkcijų srityje 12–16 metų mokiniams.

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

Tolesniuose skyriuose bus atsižvelgta į skirtingas šalių mokymo programas, kad būtų sukurtas pagrindas aktyviam mokymuisi šioje matematikos srityje.

2.1. Funkcijų mokymo programos Kroatijoje

Kroatijos matematikos mokymo programose yra penkios pagrindinės temos: (A) Skaičiai, (B) Algebra ir funkcijos, (C) Geometrija, (D) Matavimas ir (E) Statistika ir tikimybė. „Algebra ir funkcijos“ srityje mokiniai apibrėžia funkcijas ir interpretuoja, lygina, grafiškai vaizduoja ir sužino apie jų savybes, atpažindami dėsningumus ir apibūdindami dviejų dydžių priklausomybę algebros kalba. Jie modeliuoja situacijas apibūdindami jas algebriškai ir sprendžia realaus gyvenimo problemas, susijusias su dėsningumais ar funkcinėmis priklausomybėmis. Šioje lentelėje apžvelgiamos įvairios 12–16 metų mokinių funkcijų rūšys.

2 Lentelė. Programa Kroatijoje

Ugdymo rezultatai		**Funkcijos samprata**	**Grafinis funkcijos vaizdavimas**	**Proporcija**	**Linijinė funkcija**	**Kvadratinė funkcija**
PIRMINĖ EDUKACIJA	**6 klasė**				Išspręsti ir pritaikyti tiesinę lygtį	
	7 klasė	Papildomas turinys: susiekite tiesinę priklausomybę su tiesine funkcija	Tiesinė priklausomybė	Proporcingumas ir atvirkštinis proporcingumas	Išspręskite ir pritaikykite tiesinę lygtį Taikykite tiesinę priklausomybę Papildomas turinys: išspręskite paprastą tiesinę nelygybę	
	8 klasė				Išspręskite ir pritaikykite tiesinę lygtį Išspręskite ir pritaikykite dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą	Išspręskite ir pritaikykite kvadratinę x^2=k formos lygtį

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

ANTRINĖ EDUKACIJA	**1 klasė (14,15 metų)**	Linijinė funkcija	Tiesinės funkcijos grafikas	Taikyti proporcingumą ir procentą	Taikyti tiesinę lygtį ir tiesinių lygčių sistemą Taikyti tiesines nelygybes probleminėse situacijose Prijungti skirtingus tiesinės funkcijos vaizdus Spręsdami problemas, taikykite tiesinę funkciją	
	2 klasė (15,16 metų)	Funkcijos samprata ir analizė	Funkcijos grafinio atvaizdavimo analizė			Išspręsti ir pritaikyti kvadratinę lygtį Taikyti kvadratinę funkciją

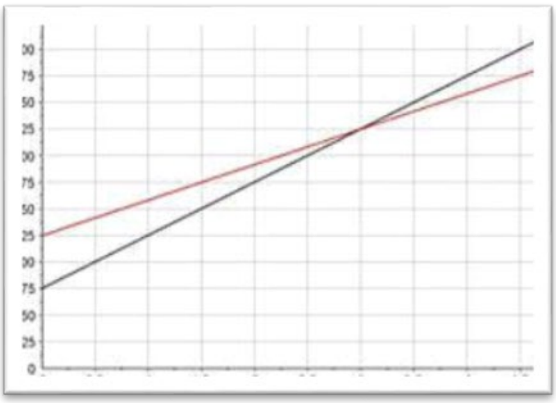
Giliau pažvelgiama į klases ir jų paklausą:

6 ir 7 klasė: Mokiniai analizuoja probleminę aibių Z ir Q situaciją ir suformuluoja ją kaip tiesinę lygtį. 6 klasėje (taip pat ir 7 klasėje) jie sutraukia sudėtingesnę tiesinę lygtį ir sudaro ax=b (ax+b=0), kai a ir b yra neneigiami racionalieji skaičiai (racionalieji skaičiai), taikant lygčių ekvivalentus. Be to, jie išsprendžia paprastą tiesinę lygtį su absoliučia verte. Be tiesinių lygčių sprendimo, mokiniai persvarsto gauto sprendimo tikslumą, prasmingumą ir paaiškina jį problemos kontekste. Papildomas turinys – išspręsti paprastą tiesinę nelygybę. Realiose gyvenimo situacijose mokiniai atpažįsta ir paaiškina proporcingumą ir atvirkštinį proporcingumą bei nustato ir interpretuoja proporcingumo ir atvirkštinio proporcingumo koeficientus. Taip pat jie susieja proporcingumo koeficientą su dviejų proporcingų dydžių santykiu. Tai yra rekomendacija skatinti mokinius naudoti intuityvų požiūrį sprendžiant proporcingumo ir atvirkštinio proporcingumo problemas. Taip pat nustatyti ir paaiškinti kai kuriuos sudėtingus matavimo vienetus (km/h, m/s, g/cm3, kg/m3, gyventojai/km2) ir konvertuoti valiutas.

„Taikyti tiesinę priklausomybę" rezultate mokytojai tikrina ne mokinio skaičiavimo techniką, o loginį mąstymą ir gebėjimą analizuoti problemą. Mokiniai aiškina tiesinę dydžių priklausomybę nuo realių probleminių situacijų. Akcentuojamas priklausomų dydžių tyrimas, stebimos tiesinės priklausomybės situacijos pavertimas algebriniu žymėjimu, tiesinės priklausomybės grafinio vaizdavimo interpretavimas ir kitimo analizė. Mokiniai sudaro tiesiškai priklausomų duomenų verčių lentelę. Jie grafiškai

vaizduoja tiesinę priklausomybę ir sukuria ryšį tarp tiesinės priklausomybės ir tiesinės funkcijos.
8 klasė: Pateiktuose uždaviniuose mokiniai atpažįsta galimybę išspręsti dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą. Jei sistema yra sudėtingesnė, jie sutraukia ją iki standartinės formos ir išsprendžia ją tam tikru arba savavališku metodu. Be to, diskutuojama apie gauto sprendimo egzistavimą (unikalumą, nebuvimą, be galo daug sprendimų). Mokiniai aprašo x^2=k formos kvadratinę lygtį, kur k yra neneigiamas racionalusis skaičius, ir taiko kvadratinę lygtį probleminėms situacijoms spręsti bei dydžių atvaizdavimui matematinėmis formulėmis. Jie aiškina dviejų sprendinių egzistavimą.1 klasė: Mokiniai rašo duotą uždavinį tiesinės lygties arba tiesinių lygčių sistemos forma ir jas išsprendžia. Jie aptaria sprendimo egzistavimą atsižvelgdami į parametrų reikšmę. Mokiniai sprendžia tiesines nelygybes rašydami sprendinį įvairiais būdais, tiesinių nelygybių su vienu nežinomu sistemas ir paprastas tiesines nelygybes su absoliučia verte. Mokiniai jungia skirtingus tiesinės funkcijos vaizdus. Tam tikrai tiesinei funkcijai jie apskaičiuoja funkcijos reikšmę, nubraižo grafiką, apibrėžia ir nustato funkcijos nulį bei interpretuoja koeficientus..

Be to, lentelėmis ir grafikais jie atvaizduoja tiesinę funkciją ir apibūdina koeficientų įtaką grafiko padėčiai. Mokiniai skaito argumentus ir reikšmes iš grafiko ir nustato koeficientus bei funkciją. Iš pateiktų elementų (argumentų ir reikšmių, grafiko taškų, koeficientų) jie nustato funkciją. Išplėstinis turinys yra nubraižyti absoliučios reikšmės funkcijos grafiką. Iš pateiktų duomenų mokiniai rašo tiesinę priklausomybę kaip tiesinę funkciją. Probleminėse situacijose jie atpažįsta tiesinę priklausomybę, užrašo ją kaip funkciją ir taiko analizuodami problemą. Jie turi analizuoti problemą pagal jos grafinį vaizdą. Pavyzdžiui, suprojektuoti užduotį, parodytą duotame grafike (5 pav*):*



5 Paveikslas: Užduoties projektavimas pagal pateiktą grafiką

2 klasė: Mokiniai efektyviai sprendžia kvadratinę lygtį, tikrina jos sprendinius ir argumentuoja sprendinių prigimtį. Pavyzdžiui: „Neišsprendę lygties 3x^2+4x-1=0 nustatykite jos sprendimo pobūdį“. Taip pat jie taiko diskriminantą nustatydami

kvadratinės lygties sprendimo pobūdį. Be to, jie sprendžia lygtis, kurios redukuoja į kvadratinę lygtį, modeliuoja probleminę situaciją ir nustato sprendimus.

Srityje „Funkcijos analizė“ mokiniai apskaičiuoja daugianario, racionaliosios ir iracionaliosios funkcijos funkcinę reikšmę. Jie paaiškina funkcijos sąvoką ir skaičiavimo būdu nustato paprastų racionalių ir neracionalių funkcijų sritį ir kododomeną. Be to, jie apibrėžia bijekciją ir atpažįsta ją aibių pavyzdžiuose, parodytuose Venno diagramose, ir nustato tiesinės ir kvadratinės funkcijos vaizdą. Paprastos racionalios funkcijos yra $f(x)=a/(bx+c)$ formos. Paprastos iracionalios funkcijos yra $f(x)=\sqrt{(ax+b)}$ formos.

Srityje „Funkcijos grafinio atvaizdavimo analizė“ mokiniai atvaizduoja funkcijas grafiškai ir, naudodami grafiką, nustato funkcijos domeną, kododomeną ir vaizdą. Pavyzdžiui: „Nubraižykite grafikus $f(x)=1/x$ ir $f(x)=\sqrt{x}$, nustatydami funkcinę reikšmę kai kurioms kintamojo x reikšmėms. Tada nubraižykite jų atvirkštinių funkcijų grafikus, atvaizduodami funkcijas per liniją $y = x$. Mokiniai braižo kvadratinės funkcijos grafiką su racionaliais koeficientais. Jie nustato nulį, sankirtą su ordinatėmis, parabolės viršūnę, simetrijos ašį ir funkcijos eigą. Jie išsprendžia paprastas kvadratines nelygybes. Grafiškai pavaizduodami kvadratinę funkciją, mokiniai paaiškina funkcijos formą priklausomai nuo diskriminanto ir pirmaujančio koeficiento.

Išplėstinis turinys skirtas nurodyti funkciją iš grafiko. Pavyzdžiui: mokiniai grafiškai pavaizduos $f(x)=a(x-x_0)^2+y_0$ formos funkciją naudodami vertimą ir formos $f(x)=ax^2+bx+c$ funkciją penkių taškų metodu (tikrasis nulis, parabolės viršūnė, sankirta su ordinate, sankirtos atvaizdavimas virš simetrijos ašies). Probleminė situacija apima kraštutinumų ir kvadratinių bei tiesinių funkcijų sankirtų nustatymo uždavinius. Pavyzdžiui: „Stebint prekės pardavimą, buvo nustatyta, kad pardavimus galima apibūdinti kvadratine funkcija $f(x)=-3/20\ x^2+12x-180$, kur x yra prekės kaina, o f(x) yra parduodamos prekės vienetų skaičius už x kainą. Kiek produktų bus parduota, jei kaina 30 kunų? Kiek uždirbs prekybininkas? Už kokią kainą šios prekės pardavimas bus maksimalus?"

Funkcijų tema per klases tampa vis svarbesnė. Iš pradžių skaičiai yra pagrindinė matematinio ugdymo mokykloje tema. 50% mokymosi laiko. Funkcinis mąstymas sudaro 20% mokymosi laiko. Laikotarpio pabaigoje Kroatijos mokyklose, kuriose funkcinis mąstymas yra pagrindinė tema, mokomasi 45 proc. laiko..

2.2. Funkcijų mokymo programos Vokietijoje

Įprastoje Vokietijos mokyklų sistemoje yra trys vidurinio ugdymo baigimo tipai iki 16 metų. Jie visi susiję su funkcijų samprata ir skirtingų tipų funkcijomis. Toliau pateiktoje lentelėje bus pateikta apžvalga.

3 Lentelė: Programa Vokietijoje

Funkcijos tipas Baigimo lygis	Proporcija	Linijinis	Kvadratinis	Trigonometrinis	Eksponentinis
„Hauptschulabschluss“ (žemas lygis) Atstovauja baigusiems 9 klasę (14,15 m.)	konceptualiai atskirti proporcingas, antiproporcines ir tiesines užduotis ir naudoti jas skaičiavimams	dirbti su tiesinėmis funkcijomis			
„Mittlerer Schulabschluss“ (medium level) Represents graduating 10th grade (15,16 years old)			dirbti su kvadratinėmis funkcijomis įvairiuose terminuose	apibūdinti periodinius procesus su sinuso funkcija	konceptualizuoti eksponentinį augimą ir naudoti jį skaičiavimams
„Zulassung Oberstufe“ (aukštas lygis)		apibūdinti augimo procesus naudojant tiesines funkcijas Išspręskite daugianario lygtis, kurias galima redukuoti į tiesines lygtis paprasčiausiai iškaičiuoja	apibūdinti kvadratinių funkcijų savybes taikyti paprastas transformacijas kvadratinėms funkcijoms Išspręsti daugianario lygtis, kurias galima redukuoti į kvadratines lygtis, naudojant paprastą faktorių ar	sinusinėms funkcijoms taikyti paprastas transformacijas įvardinti kosinuso funkciją kaip sinuso funkcijos išvestinį	apibūdinti augimo procesus eksponentinių funkcijų pagalba taikyti paprastas transformacijas eksponentinėms funkcijoms sudaryti natūraliosios eksponentinės funkcijos išvestinę apibūdinti eksponentinių funkcijų savybes ir konkrečią natūraliosios eksponentinės funkcijos savybė naudoti eksponentines funkcijas augimo ir irimo procesams apibūdinti ir lyginti modeliavimo kokybę pavyzdingai su ribotu augimu

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

		nt arba pakeičiant tiesinėms lygtims be skaitmeninių pagalbinių priemonių, įrankiai	pakeitimą į kvadratines lygtis, be skaitmeninių pagalbinių priemonių, be skaitmeninių pagalbinės priemonės		

Vokiečių mokymo programoje funkcijų sritis yra glaudžiai susijusi su lygčių sritimi. Pradinis ugdymas dažniausiai baigiasi ketvirta klase.

Viduriniame ugdyme kreipiamasi į funkcijų sritį tokiu didėjančiu turiniu:

● 5 ir 6 klasė: dydžių santykių išankstinės sąvokos; lengvų terminų naudojimas situacijoms apibūdinti; nesunkių realių situacijų problemų sprendimas naudojant tokius metodus kaip sistemingas bandymas.

● 7 ir 8 klasė: skaičių ir dydžių santykių samprata; proporcingi ir antiproporciniai santykiai; procentų skaičiavimas kaip proporcinio santykio samprata; termino samprata; tiesinės lygties samprata lengvose situacijose (pvz., 2x+5 = 3) naudojant skirtingus lygčių sprendimo metodus, pvz., sisteminį bandymą, veikimo metodus ir transformaciją.

Funkcijos kaip specialaus santykio samprata; proporcinės ir tiesinės funkcijos; tiesinių lygčių samprata ir jų sprendimas algebriniais ir grafiniais metodais; funkcijos ir lygties ryšys; tiesinių lygčių sistema.

● 9 ir 10 klasė: kvadratinės funkcijos; parametrų keitimas; kvadratinių lygčių samprata ir jų sprendimas algebriniais ir grafiniais metodais; funkcijos ir lygties ryšys; santykis ir lengvos lygtys su santykiu.

pasirinktinai: funkcijų sistema (tiesinė, kvadratinė) ir jų sprendimas grafiškai bei algebriškai; kitų tipų funkcijos, prieštaraujančios tiesinėms ir kvadratinėms funkcijoms, pavyzdžiui, eksponentinės funkcijos lengvuose kontekstuose; sin x kaip paprastas periodinės funkcijos pavyzdys.

Mokymo programoje yra dvi pagrindinės temos: (1) skaičiavimas, (2) ryšiai, funkcijos ir lygtys. (3) plokštumos geometrijos laukai, ypač. su trikampiais ir (4) statistika nėra svarbi lyginant su (1) ir (2). (5) Erdvinė geometrija yra laukų pabaigoje.

5 ir 6 klasėse santykių, funkcijų ir lygčių laukas yra pratęstas. 20% matematinių studijų programų. Išankstinės nuostatos įgyvendinamos dydžių ir plokštumos geometrijos srityje. 7 ir 8 klasėse šis laukas išplečiamas apytiksliai 50 proc. Tai yra dominuojanti tema šiose klasėse. Taip pat 9 ir 10 klasėse šis laukas yra 50–60 %. Specialiųjų lygčių

tvarkymas taip pat dalyvaus plokštumos geometrijoje (pvz., santykis susikertančių tiesių teoremoje).

2.3. Funkcijų mokymo programos Lietuvoje

Lietuvos mokyklose funkcijų sritis vystysis taip, kaip parodyta šioje lentelėje.

4 Lentelė. Programa Lietuvoje

	Lentelių, grafikų ir formulių supratimas ir naudojimas	**Funkcinių modelių ir savybių taikymas**	**Koordinačių metodo taikymas geometrinėms figūroms aprašyti ir jų savybėms tirti.**	**Grafinis lygčių, nelygybių ir jų sistemų sprendimas**	**Grafiko transformacija**
5-6 klasės (11,12 metų)	Skaityti (analizuoti) priklausomybes tarp dviejų dydžių, išreikštų paprastais grafikais ar lentelėmis. Savais žodžiais paaiškinti, ką rodo skaičiai ant Ox ir Oy ašių. Iš pateikto grafiko ar lentelės rasti vieno dydžio reikšmę, kai nurodoma kito dydžio reikšmė.	Išspręsti paprasčiausias kasdienio turinio užduotis, kai du dydžiai yra tiesiogiai proporcingi. Norint pateikti tiesiogiai proporcingų dydžių pavyzdžių, paaiškinti, kaip rasti vieno vertę, kai kito vertė yra žinoma.			
7-8 klasės (13,14 m.)	Naudoti lenteles, grafikus ir formules, apibūdinančias dviejų dydžių priklausomybes, sprendžiant paprastus praktinio ir matematinio turinio uždavinius. Savais žodžiais paaiškinti nepriklausomų ir priklausomų	Aiškinant paprastų įvairaus turinio uždavinių sprendimus, remtis tiesioginio ar atvirkštinio proporcingumo modeliais ir savybėmis, proporcingumo savybe. Atsiminti, kad tiesiogiai proporcingi dydžiai yra susiję su lygtimi y / x = k ir atvirkščiai			

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

	kintamųjų sąvokas, žinoti, kaip jie žymimi. Paprastais atvejais iš grafiko, formulės ar lentelės nustatyti, kaip rasti vieno dydžio reikšmę, kai nurodoma kito dydžio reikšmė.	proporcingi lygybei x · y = k, pateikti su tokiomis priklausomybėmis susijusių dydžių pavyzdžių. Paprasčiausiais atvejais taikyti pagrindinę proporcijos savybę. Norint suprasti, kiek taškų reikia pasirinkti, nubraižyti tiesioginio ir atvirkštinio proporcingumo grafiko eskizą. Sudaryti ir užpildyti dalinę tiesioginio ir atvirkštinio proporcingumo reikšmių lentelę, kai x> 0, nubraižyti jų grafikų eskizus. Gebėti patikrinti, ar taškas priklauso funkcijų tvarkaraščiui.			
9-10 klasių (15,16 m.).	Derinti skirtingus funkcijų raiškos būdus, taikyti funkcijos savybes sprendžiant paprastus praktinio ir matematinio turinio uždavinius. Apibūdinti nepriklausomo kintamojo (argumento) ir nepriklausomo kintamojo (funkcijos) sąvokas, parašyti jų simbolius. Paprastais atvejais iš grafiko, formulės ar lentelės	Aiškinant įvairaus turinio nesudėtingų uždavinių sprendimus, remtis tiesioginio arba atvirkštinio proporcingumo, tiesinės, kvadratinės funkcijos, proporcijos savybės modeliais ir savybėmis. Tiesioginiam arba atvirkštiniam proporcingumui atpažinti įvairiai išreikštas tiesines, kvadratines funkcijas pateikti su šiomis funkcijomis susijusių dydžių pavyzdžių.	Nubraižyti figūras koordinačių sistemoje, nubrėžti simetrišką figūrą taško ir tiesės atžvilgiu, apibūdinti figūrų padėtį koordinačių sistemoje skaičių poromis. Rasti atkarpos ilgį, atkarpos vidurio taško koordinatės, kur žinomos atkarpos galų koordinatės. Skaičių porą susieti su jos atvaizdu koordinačių sistemoje.	Grafiškai apytiksliai išspręsti tiesinių lygčių sistemas. Grafiškai aproksimuoti lygtis f (x) = a, f (x) = g (x) ir nelygybes f (x) a, f (x) ≤a, f (x) ≥a, kur f (x) ir g (x) yra tiesioginio, atvirkštinio proporcingumo, tiesinės, kvadratinės funkcijos, o a yra skaičius. Savo žodžiais paaiškinti grafinio metodo esmę. Iš grafiko rasti apytikslį tiesinių lygčių	Atlikti grafiko y = x2 transformacijas: tempimas Oy ašyje (y = ax2), stūmimas į Ox ir Oy ašis (y = x2 + n ir y = (x - m) 2), simetrija Jaučio ašis (y = -x2); susieti grafų transformacijas su pokyčiais formulėje y = x2. Žinoti, kaip transformuoti funkcijos grafiką naudojant grafiko trauką Ox ir Oy ašyse, tempimą (slėgį), simetriją.

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

	nustatyti, kuris dydis nepriklausomas , kuris priklausomas, žinoti, kaip rasti vieno reikšmę, kai nurodoma kito reikšmė. Iš grafiko nustatyti, ar dviejų dydžių priklausomybė yra funkcinė. Pateikti funkcijų ir nefunkcijų pavyzdžių. Paaiškinti, kaip patikrinti, ar taškas priklauso funkcijų grafikui. Iš grafiko rasti funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis, didėjimo, mažėjimo intervalus, funkcijos reikšmių stabilumą, maksimalią ar mažiausią funkcijos reikšmę. Norint sužinoti, kaip rasti, su kuriomis argumentų reikšmėmis funkcija įgauna tam tikrą reikšmę, funkcijos reikšmės yra teigiamos (arba neigiamos), kai funkcija išreiškiama grafiku arba formule	Paprastais atvejais taikyti pagrindinę proporcijos savybę. Norint suprasti, kiek taškų reikia pasirinkti norint nubraižyti formules y = kx + b, y = k / x ir y = x2, y = ax2 + bx + c, y = a (x - m)2 + n; y = a (x - x1) (x - x2) funkcijų grafikus, kad žinotumėte, kokie yra grafikų pavadinimai. Paaiškinti, kaip parašyti funkcijos išraišką iš tiesinių ir kvadratinių funkcijų grafiko.	Nurodyti, kuriam koordinačių ketvirčiui priklauso taškas. Koordinačių sistemoje pažymėti tašką, simetrišką duotai tiesei ar taškui, patikrinti, ar dvi figūros yra simetriškos koordinačių pradžios, Ox ir Oy ašių atžvilgiu. Naudoti pavyzdį, paaiškinantį, kaip rasti atkarpos ilgį, atkarpos vidurio taško koordinates, kai žinomos atkarpos galų koordinatės.	sistemos sprendimą. Remiantis pavyzdžiu, paaiškinti, kaip iš grafiko rasti lygties ar nelygybės su nežinomuoju sprendimą.	Pavyzdžiui, funkcijos y = x2 grafikas paaiškina, kaip nubraižyti funkcijos y = a (x - m)2 + n grafiką.

2.4. Funkcijų mokymo programos Ispanijoje

Ispanijos mokyklų sistemoje, kalbant apie privalomąjį vidurinį išsilavinimą (E.S.O), yra keturi lygiai, kurie baigiami 16 metų ir pradedami 12 metų.

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

Table 5: Programa Ispanijoje, 1 dalis

	Amžius	
Pradinis išsilavinimas	1 – 6 klasė	6 – 12
Privalomas vidurinis išsilavinimas (E.S.O)	1 klasė	12 – 13
	2 klasė	13 – 14
	3 klasė	14 – 15
	4 klasė	15 – 16
Bakalaureatas	1 – 2 klasė	16 – 18

Ispanijos mokymo programos visuose kursuose yra suskirstytos į penkis mokymosi blokus: I. „Matematikos procesai, metodai ir nuostatos“, II. „Skaičiai ir algebra“, III. „Geometrija“, IV. „Funkcijos“ ir V. „Statistika ir tikimybė“.

Pagrindinės kiekvieno kurso temos, o ypač su funkcijomis susijęs turinys, pateikiamos tolesnėje lentelėje:

6 Lentelė. Programa Ispanijoje 2 dalis

1 klasė	**12-13**
Bendrai: Studentai kuria grafinius vaizdus, kad paaiškintų vykdomą procesą naudojant technologines priemones. Jie taip pat apskaičiuoja skaitinių išraiškų reikšmę elementariomis operacijomis ir natūraliojo eksponento laipsniais, taikydami operacijų hierarchiją. Jie taiko dalijimosi iš 2, 3, 5, 9 ir 11 dalijimosi kriterijus, kad išskaidytų į pirminius veiksnius. Be to, mokiniai nustato didžiausią bendrąjį daliklį ir mažiausią bendrąjį kartotinį, taip pat priešingybes ir absoliučias reikšmes. Galiausiai jie supranta aritmetines ir geometrines Pitagoro teoremos reikšmes ir ją taiko. Konkrečiai funkcijose: Mokiniai dirba su duomenų tvarkymu verčių lentelėse, Dekarto koordinatėmis, taip pat taškų atvaizdavimu koordinačių ašių sistemoje, todėl jie turi nustatyti skirtingus taškus iš jų koordinačių. Papildomas turinys šiame etape yra tiesioginių proporcingumo sąsajų nustatymas analizuojant jų verčių lentelę. Studentai naudoja priešingus pavyzdžius, kai dydžiai nėra tiesiogiai proporcingi.	

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

2 klasė	13-14
Mokiniai sprendžia operacijas su sveikaisiais skaičiais ir dirba su eksponentu. Jie taip pat dirba su dešimtainėmis ir šeštinėmis sistemomis, taip pat su trupmenomis, pavyzdžiui, sprendžia aritmetines užduotis su trupmeniniais skaičiais. Į šio lygio mokymo programas įtraukta ir Pitagoro teorema, taip pat geometrinių kūnų studijos. Be to, studentai atlieka tikimybių skaičiavimus ir skaito statistinius grafikus. Konkrečiai funkcijose: Mokiniai dirba su funkcijos samprata, priklausomais ir nepriklausomais kintamaisiais, taip pat su augimo, mažėjimo, maksimumų ir minimumų sąvokomis ir skaičiavimais. Mokiniai naudoja proporcingumo funkcijas (y=mx); tiesinės funkcijos (y=mx + n) ir pastovios funkcijos (y=k).	
3 klasė	**14-15**
Mokiniai naudojasi racionaliųjų skaičių savybėmis operacijose, tinkamai skaičiuodami problemas, moka ir naudoja algebrinę kalbą teiginiams reikšti algebrine forma. Mokiniai kasdienius uždavinius sprendžia pasitelkdami pirmojo ir antrojo laipsnio lygtis bei dviejų tiesinių lygčių su dviem nežinomaisiais sistemas. Mokiniai nustato ir apibūdina plokštumų figūrų ir elementariųjų geometrinių kūnų charakteristikas su jų geometrinėmis konfigūracijomis. Statistikai skirtose temose mokiniai mokosi analizuoti informaciją su duomenimis per atitinkamas lenteles ir grafikus su išvadomis, atspindinčiomis tirtą populiaciją, be daugelio kitų aspektų. Konkrečiai funkcijose: Mokiniai toliau tobulina funkcijos sampratą, grafiką, kaip dviejų kintamųjų (funkcijos) ryšį, jo nomenklatūrą, taip pat kitas pagrindines su funkcijomis susijusias sąvokas, tokias kaip nepriklausomi ir priklausomi kintamieji. Šio lygio mokiniai duotų funkcijų interpretaciją atlieka naudodamiesi grafikais ir grafikų priskyrimą funkcijoms ir atvirkščiai. Mokiniai dirba su funkcijos variacijomis, jos augimu ir nykimu bei maksimumais ir minimumais. Šia prasme jie gali nustatyti augimą ir mažėjimą, taip pat duotų funkcijų maksimumus ir minimumus naudodami savo grafikus. Taip pat tiriamas funkcijos nepertraukiamumas ir tęstinumas, nuolatinių ir nepertraukiamų funkcijų atpažinimas, tendencija ir ilgalaikis elgesys, o mokiniai nustato funkcijos tendenciją iš dalies. Į mokymo programas taip pat įtrauktas periodiškumo tyrimas, tų funkcijų, kurios pateikia periodiškumą, atpažinimas ir tolesnis darbas su analitine išraiška, taip pat analitinių išraiškų priskyrimas skirtingiems grafikams ir atvirkščiai.	
4 klasė	**15-16**

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

Šiame lygyje mokiniai dirba ties daugianario šaknimis ir įskaičiuoja jį naudodami Ruffini taisyklę. Jie taip pat atlieka operacijas su daugianariais ir paprastomis algebrinėmis trupmenomis, sprendžia antrojo laipsnio lygtis per faktorių skaidymą ir naudoja pagrindinę trigonometriją problemoms spręsti. Jie gali išspręsti trikampius naudodami trigonometrinius santykius, taip pat dirba su taškų ir vektorių koordinatėmis.

Mokiniai skaičiuoja plotus, trikampių, keturkampių, apskritimų ir kt. tūrius, atstumą iki taško ir jo vektoriaus modulį. Mokiniai taip pat paaiškina ir grafiškai vaizduoja tiesinį, kvadratinį, atvirkštinį proporcingumą, eksponentinį ryšį.

Konkrečiai funkcijose:
Mokiniai gilinasi į funkcijos sampratą, grafinį vaizdą, reikšmių lentelę ir analitinę išraišką ar formulę; grafinių ir analitinių funkcijų išraiškų ryšys; funkcijos apibrėžimo sritis, taip pat funkcijos srities apribojimai.
Mokiniai atlieka įvairių funkcijų apibrėžimo srities skaičiavimą ir analizuoja jos charakteristikas, jos nepertraukiamumą ir tęstinumą bei nagrinėja netolydybių konstravimą, funkcijos augimą, mažėjimą, maksimumus ir minimumus, taip pat funkcijos tendenciją ir periodiškumą.

Be to, šiame lygmenyje tiriamas vidutinis kitimo greitis, taip pat vidutinis funkcijos kitimo koeficientas intervale.

2.5. Išvada

Kaip parodyta aukščiau esančiuose skyriuose, skirtingose EnLeMaH projekte dalyvaujančiose šalyse funkcijų sritis gauna svarbiausią matematinę temą per grįstą vidurinio ugdymo laikotarpį. Skirtingas partnerių kultūrinis pagrindas gali sudaryti prielaidą, kad ši svarba išliks neskaitant keturių šalių. Be to, pateiktos mokymo programos duoda užuominų, kad įvairiose šalyse matematinio mokymosi procesas funkcinių sąvokų, funkcinių tipų atžvilgiu yra panašus savo tvarka ir išdėstymu. Tai ir yra bendras mokytojų darbo, skirto aktyviam mokymuisi, pagrindas, be konkrečios šalies požiūrio: mokymosi funkcijų išdėstymas mokykloje yra gana panašus.

3. Aktyvus mokymasis ir mokymas EnLeMaH projekte

Šiame skyriuje bus atsižvelgta į aktyvaus mokymosi mokykloje filosofiją. Taip bus atsižvelgiama į aktyvaus mokymosi įgyvendinimą nacionaliniuose standartuose, mokytojų rengimo programose ir universitetinėse programose.

3.1. Kroatijos filosofija

Pagal Kroatijos matematikos kurso programą pradinėms mokykloms ir gimnazijoms nuo 2019 m.(Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj (nn.hr)), mokymasis ir mokymas pasiekiamas jungiant matematinius procesus ir sritis. Šis dvimatiškumas pasireiškia rezultatuose ir prisideda prie matematinių kompetencijų įgijimo. Matematiniai procesai yra: vaizdavimas ir komunikacija, susiejimas, loginis samprotavimas, argumentavimas

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

ir išvados, problemų sprendimas ir matematinis modeliavimas bei technologijų taikymas. Matematikos dalykų sritys yra: skaičiai, algebra ir funkcijos, forma ir erdvė, matavimai ir duomenys, statistika ir tikimybė..

Pagal mokymo programą, nepaisant visų sąvokų ir procesų evoliucijos, reikia keisti ir modernizuoti matematikos mokymosi ir mokymo būdą bei suteikti mokiniams įvairios ir turtingos mokymosi patirties. Ypač svarbu gebėjimas pritaikyti tai, ko išmoko įvairiose probleminėse situacijose, ir žinios, kaip reguliuoti savo mokymąsi.

Organizuodamas mokymosi ir mokymo procesą, mokytojas pasirenka mokymosi apimtį ir gylį bei pritaiko problemas, metodus ir strategijas, kurie geriausiai atitiktų mokinių poreikius, galimybes ir interesus. Mokytojas ir mokiniai gali savarankiškai pasirinkti medžiagą ir technologijas, kurios matematikos mokymąsi pavers sudėtingu, įvairiapusišku, skatinančiu ir leis įgyvendinti numatytus mokymosi rezultatus. Mokymo programoje pabrėžiama, kad vadovėlyje šiuolaikinėje matematikos klasėje pateikiamas turinys, kuriuo galima pasiekti numatytus visų žinių lygių rezultatus, tačiau tai neriboja mokymosi ir mokymo proceso planavimo ar jo vykdymo būdo. Mokytojas gali laisvai nuspręsti, kaip ir kokia tvarka siekiama užsibrėžtų tikslų ir kokia papildoma literatūra bei informacijos šaltiniais naudojasi mokiniai. Mokytojas yra atsakingas už naujoviško požiūrio taikymą, naujų žinių šaltinių tyrinėjimą ir tinkamą naujų technologijų panaudojimą, kad užbaigtų mokymąsi ir mokymą..

Iš to, kas išdėstyta pirmiau, aišku, kad Nacionalinėje ugdymo programoje nenurodyta ir nesiūloma, kaip turi būti mokomas konkretus matematinis turinys, ir žymiai padidinama mokytojų laisvė ir atsakomybė kuriant mokymo procesą.

Taigi aktyvus mokymasis, kurį kai kurie iš jų jau naudojo mokymo procese, tapo problema didesniam skaičiui mokytojų, kurių daugeliui reikia paramos žengiant pirmuosius žingsnius naujo mokymo metodo srityje. Jiems padeda profesionali literatūra, ypač tekstai, kuriuose kalbama apie aktyvųjį mokymąsi matematikoje. Žemiau pateikiami tik keli iš jų, kurie aprašyti išsamiau.

3.1.1. Aktyvaus mokymosi Kroatijoje pavyzdžiai

• MiŠ (Matematika i škola) – Matematika ir mokykla (https://mis.element.hr/): Miš yra švietimui skirtas žurnalas, skirtas mokyklų mokytojams, studentams ir visiems, kurie domisi matematika. Žurnalas leidžiamas keturis kartus per metus. Straipsniuose supažindinama su įvairiomis temomis, susijusiomis su matematikos mokymo metodika. Taip pat paaiškinama kūrybinė ir aktyvi veikla, pristatoma naujausia ugdymo patirtis.

Aktyvaus mokymosi darbų pavyzdžiai MIŠ:
• Lučić, Rad s algebarskim pločicama (Darbas su algebros plytelėmis), Matematika i škola XXI (2020), 105; 207-210.

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

• B. Majdiš, Računanje površine s pomoću tangram slagalice (Ploto skaičiavimas naudojant tangramą), Matematika i škola XXI (2020), 103; 102-10.
• A. Dika, Izračunavanje površine mnogokuta s pomoću točkaste mreže (Ploto skaičiavimas naudojant taškų tinklą), Matematika i škola XX (2019), 98; 137-144. https://mis.element.hr/fajli/1709/98-11.pdf
• P. Valenčić, Matematika – nužno potrebna za život (Matematika – būtina gyvenimui), Matematika i škola XX (2018), 97; 68-71.
https://mis.element.hr/fajli/1691/97-04.pdf
• I. Brozović, S. Rukavina, Zome Tool modelis (Zome Tool modeliai), Matematika i škola XIX (2017), 92; 51-54. https://mis.element.hr/fajli/1605/92-02.pdf
• P. Valenčić, Od laikas do izrade drvenog nastavnog pomagala (Nuo idėjos iki medinės mokymo priemonės sukūrimo), Matematika i škola XIX (2017), 92; 55-60. https://mis.element.hr/fajli/1606/92-03.pdf
• S. Ježić, Božićna zvijezda – vertikalno povezivanje (Kalėdų žvaigždė – vertikaliai jungiantis), Matematika i škola XIX (2017), 92; 68-72.
https://mis.element.hr/fajli/1609/92-06.pdfT. Sabo, S. Rukavina, Origami i krivulje drugog reda (Origami and second-order curves), Matematika i škola XVIII (2016), 86; 20-22.
https://mis.element.hr/fajli/1486/86-05.pdf
• M. Černivec, S. Rukavina, Radionica „Kombinatorne igre“ (Seminaras „Kombinatoriniai žaidimai“), Matematika i škola XIII (2011), 61; 14-16.
https://mis.element.hr/fajli/1087/61-04.pdf

• Poučak (https://matematika.hr/izdanja/poucak/): Poučak yra švietimui skirtas matematikos mokymo metodikos žurnalas. Jį įkūrė Kroatijos matematikų draugija, kuri propaguoja matematikos mokslus, moko matematikos visais lygiais, taiko matematiką kitose disciplinose, taip pat gerina visų matematikų socialinę padėtį. Žurnalas leidžiamas keturis kartus per metus.

• Matka (https://matematika.hr/izdanja/matka/): Matka yra žurnalas, skirtas pradinių klasių ir žemesnių vidurinės mokyklos klasių mokiniams, jų mokytojams ir tėvams. Įtrauktos įvairios temos iš geometrijos, aritmetikos, algebros ir matematikos istorijos. Be to, žurnale taip pat galima rasti matematikos pritaikymą kituose moksluose ir mene, uždavinius gabiems mokiniams, matematikos žaidimus ir rebusų galvosūkius. Žurnalas leidžiamas keturis kartus per metus.

• Acta Mathematica Spalatensia (https://amas.pmfst.unist.hr/ams/): yra tarptautinis žurnalas, skirtas straipsniams visose grynosios ir taikomosios matematikos srityse. Žurnale publikuojami originalūs moksliniai darbai ir aukštos kokybės apžvalginiai straipsniai.

Mokslinio ir matematinio raštingumo ugdymas taikant aktyvaus mokymosi strategijas:

• S. Rukavina, B. Milotić, R. Jurdana-Šepić, M. Žuvić-Butorac, J. Ledić, Razvoj prirodoznanstvene i matematičke pismenosti aktivnim učenjem (The Development of

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

Scientific and Mathematical Literacy Using Active Learning Strategies), U, rezdruga Zni 2010 m.

• Knygoje „Mokslinio ir matematinio raštingumo ugdymas taikant aktyvaus mokymosi strategijas“ aprašomi gamtos mokslų ir matematikos mokymo iššūkiai ir nurodoma aktyvaus mokymosi svarba. Knygoje yra 12 seminarų – 6 seminarai susiję su matematika ir 6 seminarai, susiję su fizika..

3.2. Vokietijos filosofija

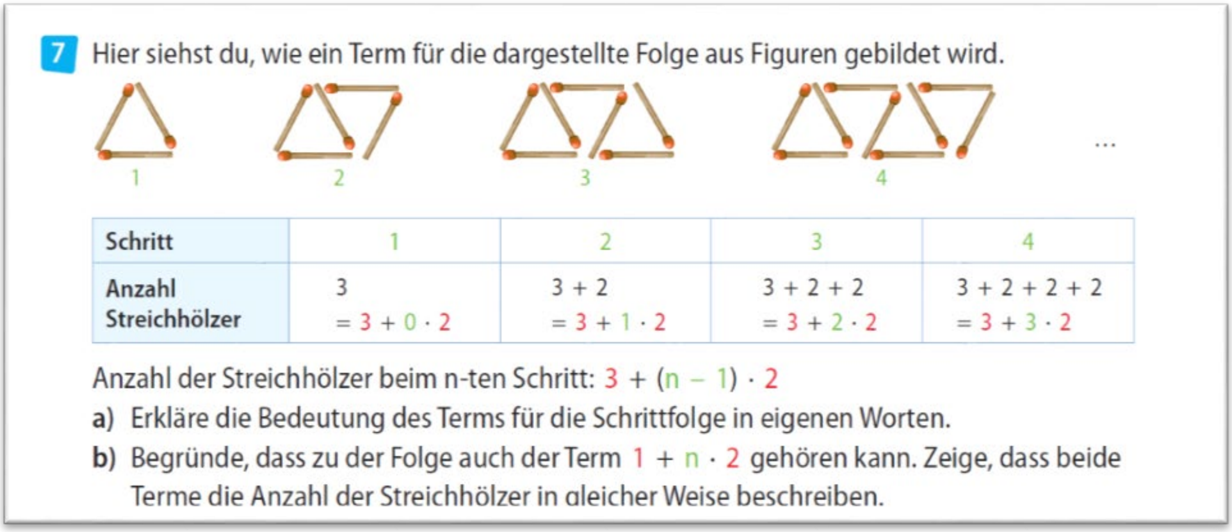
Nacionaliniai standartai apibrėžia mokinių procesus ir veiklą, kuri yra matematikos mokymosi orientacija. Nacionaliniai matematinio mokymosi standartai, pagrįsti trimis pagrindinėmis Winter (1996) patirtimi. Šią patirtį galima apibūdinti kaip (E1) orientaciją į taikymą, (E2) orientaciją į struktūrą ir (E3) orientaciją į problemą. Taigi orientacija į taikymą (E1) reiškia ne pasirengimą konkrečioms gyvenimo situacijoms, o galimybę susipažinti su pagrindine gamta, visuomene ir kultūra. Struktūrinė orientacija (E2) labiau žvelgia į matematinių objektų analizę, susijusią su dedukciniu pasaulio vaizdu. Kita vertus, orientacija į problemą (E3) pabrėžia euristinių gebėjimų atpažinti ir naudoti pavyzdžius problemų sprendimo procesuose įgijimą. Tačiau šie trys aspektai yra susiję vienas su kitu.

Matematikos mokymosi aplinka mokykloje turėtų sudaryti sąlygas mokiniams įgyti šios patirties. Aktyvus mokymasis gali būti vertinamas kaip E1 ir E3 dalis, kur mokiniai susisieja matematiką kaip realių situacijų ir modeliavimo procesų dalį. Norint įgyti pagrindines patirtis, kompetencijos apibrėžiamos kaip matematinio mokymosi tikslas. Į procesą orientuotos kompetencijos apibūdina pagrindines matematikos supratimo ugdymo veiklas ir procesus: matematinį argumentavimą (K1), problemų sprendimą (K2), matematinį modeliavimą (K3), matematinių reprezentacijų naudojimą (K4), simbolinių, formalių ir techninių elementų naudojimą, matematikos (K5) ir matematinės komunikacijos (K6).

3.2.1. Aktyvaus mokymosi Vokietijoje pavyzdžiai

6 Paveikslas: Aktyvus mokymasis vadovėliuose

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą


7 Hier siehst du, wie ein Term für die dargestellte Folge aus Figuren gebildet wird.

1 2 3 4 ...

Schritt	1	2	3	4
Anzahl Streichhölzer	3 = 3 + 0 · 2	3 + 2 = 3 + 1 · 2	3 + 2 + 2 = 3 + 2 · 2	3 + 2 + 2 + 2 = 3 + 3 · 2

Anzahl der Streichhölzer beim n-ten Schritt: $3 + (n - 1) \cdot 2$

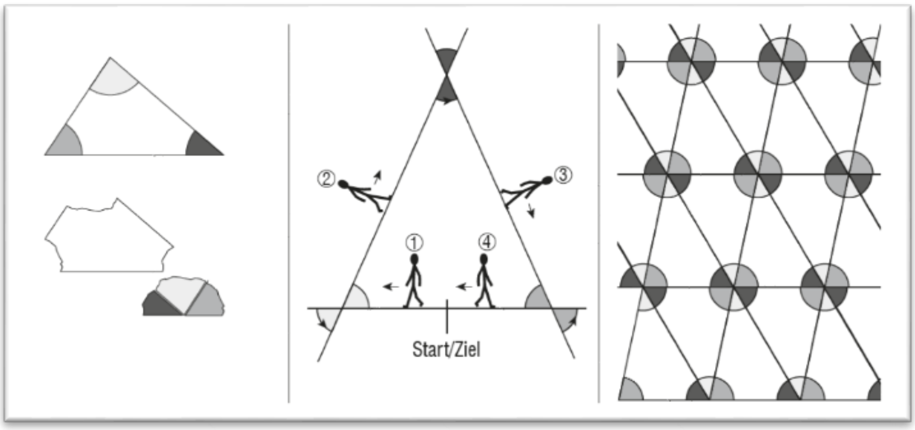
a) Erkläre die Bedeutung des Terms für die Schrittfolge in eigenen Worten.

b) Begründe, dass zu der Folge auch der Term $1 + n \cdot 2$ gehören kann. Zeige, dass beide Terme die Anzahl der Streichhölzer in gleicher Weise beschreiben.

7 Paveikslas: Aktyvus eksponentinės funkcijos pavyzdys

Aktyvaus mokymosi srityje nacionaliniuose standartuose ir mokymo programose aprašomi šie kompetencijų aspektai:

- *matematinė argumentacija (K1): Ši kompetencija apima matematinių įrodymų supratimą ir vertinimą, matematinės argumentacijos ir prielaidų sekų kūrimą.* Aktyviam mokymuisi ši kompetencija yra glaudžiai susijusi su Brunerio E-I-S principu, naudojant konkrečią medžiagą matematinėms prielaidoms ir argumentacijai.



8 Paveikslas. Aktyvus pavyzdys. Trikampio kampų suma.

- *problemų sprendimas (K2): ši kompetencija apima strategijų ir euristikos naudojimą matematinėms problemoms spręsti ir jų taikymui. Tai gali apimti*

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

žinomas strategijas ir naujų strategijų bandymą bei prijungimą. Sprendimų planai ir rezultatai yra patikrinti ir kritiškai atspindėti.

Ši kompetencija apibūdina matematinio darbo metalygį. Kalbant apie aktyvųjį mokymąsi, taip pat galima rasti aktyvių strategijų sisteminiam matematinių problemų įrodinėjimui.

- *matematinis modeliavimas (K3): ši kompetencija apima vertimą tarp matematikos ir realaus pasaulio situacijų, taip pat sąvokas, metodus ir modelius.*

  Naudojant aktyvųjį mokymąsi, šis vertimas tarp realaus pasaulio ir matematinio pasaulio yra vienas iš pagrindinių aspektų aprašant, ieškant ir naudojant matematines sąvokas bei modelius, siekiant suprasti tam tikrą aktyvią situaciją ir užduotį.
- *matematikos simbolinių, formalių ir techninių elementų naudojimas (K5): ši kompetencija apima faktus ir matematines taisykles, algoritmų panaudojimą atliekant algebrines ir geometrines operacijas. Taigi prasmingas ir apgalvotas matematinių priemonių naudojimas yra šios kompetencijos dalis.*

  Aktyviam mokymuisi, sprendžiant aktyvias užduotis, turima omenyje matematinių taisyklių naudojimas.
- *matematinis bendravimas (K6): Ši kompetencija apima matematinės pateiktos žodinės ir rašytinės informacijos supratimą. Be to, sprendimų planų dokumentavimas, matematinių sąvokų naudojimas skirtingoms auditorijoms taip pat yra šios kompetencijos dalis.*

  Norint aktyvaus mokymosi, ši kompetencija atsižvelgia į komunikacijos procesą: nuo pateiktų užduočių ar situacijos supratimo iki dokumentacijos (pvz., matematinių vaizdo įrašų naudojimo ar kūrimo).

3.3. Lietuvos filosofija

Pagal projektą dėl matematikos programos (2021), matematikos dalykas mokykloje vaidina unikalų vaidmenį ugdant mokinių skaičiavimo, abstraktaus, loginio mąstymo, vizualinio, erdvinio mąstymo, duomenų analizės ir interpretavimo, abstrakcijos įgūdžius.

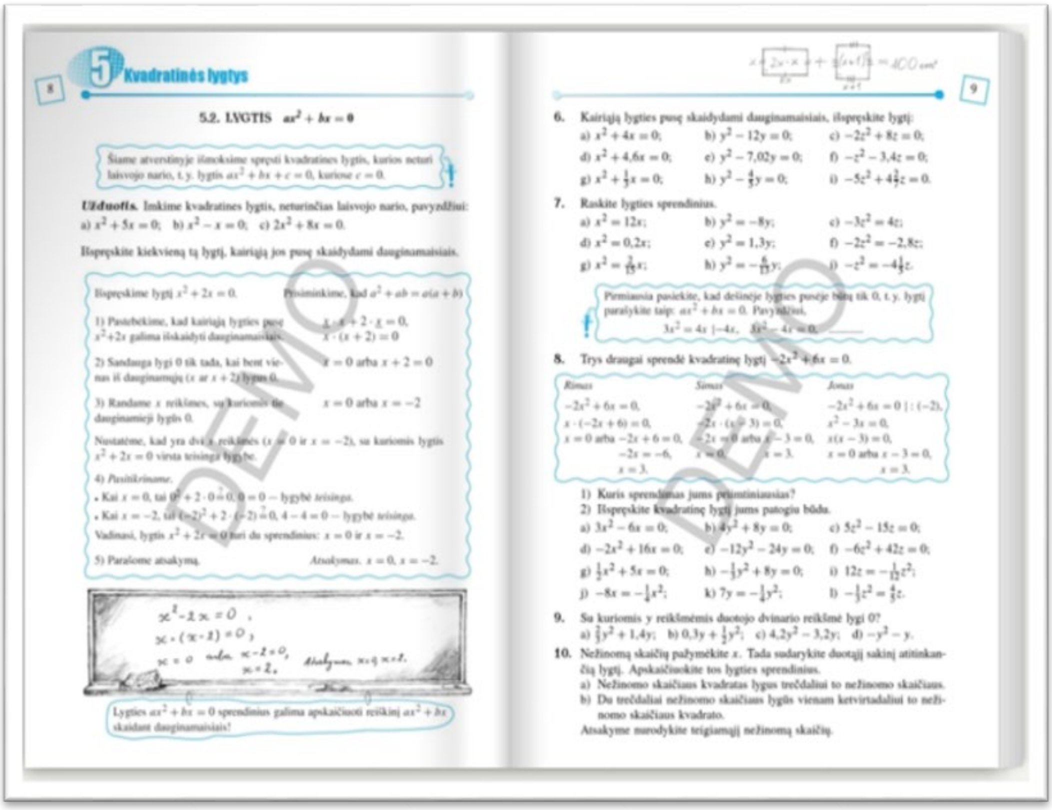
Vidurinio išsilavinimo matematikos tikslai yra tokie:

• tinkamai ir tikslingai vartoti matematines sąvokas, nurodyti ir paaiškinti jų sąsajas;
• sklandžiai atlikti matematines procedūras;
• atpažinti ir taikyti matematinį samprotavimą įvairiuose kontekstuose;
• atsakingai ir efektyviai organizuoti savo mokymosi veiklą;
• efektyviai bendrauti matematine kalba;
• pamatyti matematikos ir kitų dalykų sąsajas;
• naudoti skaitmenines technologijas matematikos mokymuisi;
• mokiniai yra pasitikintys, bendradarbiaujantys, kritiškai mąstantys ir efektyviai pritaiko įgytas matematikos žinias ir įgūdžius sprendžiant jiems suprantamas problemas įvairiuose kontekstuose.

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

Visose klasėse, nuo pirmos iki dvyliktos, mokinių pasiekimai prognozuojami trijose pasiekimų srityse: gilaus supratimo ir samprotavimo, matematinio bendravimo ir problemų sprendimo.

Tačiau nors nacionalinėje matematikos programoje akcentuojama kūrybinio mąstymo kompetencijos ugdymo svarba, dauguma matematikos pamokų yra standartinio tipo: užduočių ir užduočių iš vadovėlių/vadovėlių, sprendimus paaiškina mokytojas, pavyzdžiui, ištrauka iš vadovėlio 9 klasei:



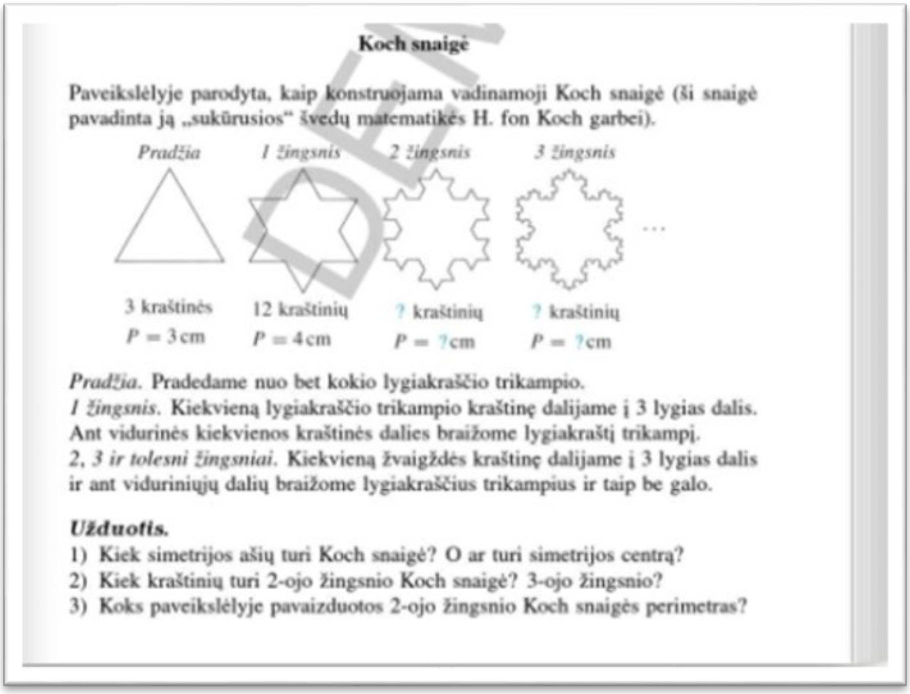
5 Kvadratinės lygtys

5.2. LYGTIS $ax^2 + bx = 0$

9 Paveikslas. Kūrybiško mokymosi pavyzdžiai

Nors matematikos užduotys gali turėti praktinių aspektų, kaip matematinės užduoties 8 klasės mokiniams pavyzdyje. Buvo pasakyta, kaip gaminama Koch snaigė (bet neprašė patiems pasidaryti), o paskui buvo paprašyta paskaičiuoti įvairius parametrus. Kai kurios kitos užduotys gali prašyti rasti sprendimą konkrečiai užduotyje nurodytai gyvenimo situacijai, pavyzdžiui, apskaičiuoti atstumą ir pan.

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą



Koch snaigė

Paveikslėlyje parodyta, kaip konstruojama vadinamoji Koch snaigė (ši snaigė pavadinta ją „sukūrusios“ švedų matematikės H. fon Koch garbei).

Pradžia	1 žingsnis	2 žingsnis	3 žingsnis
3 kraštinės	12 kraštinių	? kraštinių	? kraštinių
$P = 3$ cm	$P = 4$ cm	$P = ?$ cm	$P = ?$ cm

Pradžia. Pradedame nuo bet kokio lygiakraščio trikampio.
1 žingsnis. Kiekvieną lygiakraščio trikampio kraštinę dalijame į 3 lygias dalis. Ant vidurinės kiekvienos kraštinės dalies braižome lygiakraštį trikampį.
2, 3 ir tolesni žingsniai. Kiekvieną žvaigždės kraštinę dalijame į 3 lygias dalis ir ant viduriniųjų dalių braižome lygiakraščius trikampius ir taip be galo.

Užduotis.
1) Kiek simetrijos ašių turi Koch snaigė? O ar turi simetrijos centrą?
2) Kiek kraštinių turi 2-ojo žingsnio Koch snaigė? 3-ojo žingsnio?
3) Koks paveikslėlyje pavaizduotos 2-ojo žingsnio Koch snaigės perimetras?

10 Paveikslas. Aktyvaus mokymosi pavyzdys

Taip pat taikomi aktyvūs mokymosi metodai: darbas grupėse, projektinis tyrimas, konkursai, diskusijos, IT priemonių pritaikymas (minčių žemėlapių kūrimas, viktorinos, loginiai žaidimai, kryžiažodžiai, 3D figūrų naudojimas ir kt.). Tačiau kadangi matematikos egzaminai yra rašytinės formos, daug skaičiuojant, pagrindinė matematikos mokytojų užduotis – suteikti mokiniams supratimą ir įgūdžius, kaip greitai skaičiuoti ir taip išspręsti kuo daugiau užduočių. Aktyvesnės užduotys skiriamos pradinių klasių mokiniams, nes atsiranda daugiau laiko ir laisvės dirbti kūrybines užduotis – piešti, daryti įvairias figūrėles ir pan.

Mokslinėje literatūroje dešimtmečius analizuojama, kaip matematikos mokymą ir mokymąsi padaryti įtraukiantį ir kūrybiškesnį, svarba ir būdai, pavyzdžiui, kaip nupiešti katę naudojant linijas ir funkcijas (9 klasės mokiniams). Biekšienė, R., ir Zenkevičienė M. (2000). Aktyvaus mokymosi metodai matematikos pamokose. α+ώ, Nr. 2, 52-56 (11 pav):

I koordinatiniame ketvirtyje:

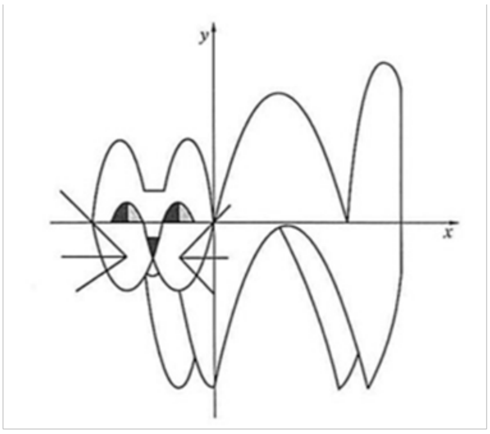
1) $y = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 8$, kai $0 \leqslant x \leqslant 8$;
2) $y = -2(x-10)^2 + 10$, kai $7{,}8 \leqslant x \leqslant 11$;
3) $x = 11$, kai $0 \leqslant y \leqslant 8{,}2$;
4) $y = x$, kai $0 \leqslant x \leqslant 1$;
5) $y = -2(x+1{,}5)^2 + 5{,}2$, kai $0 \leqslant x \leqslant 0{,}2$.

II koordinatiniame ketvirtyje:

1) $y = -x - 7$, kai $-9 \leqslant x \leqslant -7$;
2) $y = -2(x+1{,}5)^2 + 5{,}2$, kai $-2{,}8 \leqslant x \leqslant 0$;
3) $y = -2(x+5{,}5)^2 + 5{,}2$, kai $-7{,}2 \leqslant x \leqslant -4$;
4) $y = 2$, kai $-4 \leqslant x \leqslant -2{,}8$;
5) $y = -2(x+2)^2 + 1{,}2$, kai $-2{,}8 \leqslant x \leqslant -1{,}2$;
6) $y = -2(x+5)^2 + 1{,}2$, kai $-5{,}8 \leqslant x \leqslant -4{,}2$;
7) $y = 0$, kai $-5{,}8 \leqslant x \leqslant -4{,}2$;
8) $y = -5$, kai $0 \leqslant x \leqslant 1{,}2$ (nuspalvinkite dešiniąją akies pusę pilkai, o kairiąją — juodai);
9) $y = 0$, kai $-2{,}8 \leqslant x \leqslant -1{,}2$;
10) $x = -2$, kai $0 \leqslant x \leqslant 1{,}2$ (nuspalvinkite dešiniąją akies pusę pilkai, o kairiąją — juodai).

III koordinatiniame ketvirtyje:

1) $y = (x+2)^2 - 4$, kai $-4 \leqslant x \leqslant 0$;
2) $y = (x+5)^2 - 4$, kai $-7{,}2 \leqslant x \leqslant -3$;
3) $y = -1$, kai $-3{,}8 \leqslant x \leqslant -3{,}2$ (nuspalvinkite nosį juodai);
4) $y = 2(x+3{,}5)^2 - 3$, kai $-3{,}8 \leqslant x \leqslant -3{,}2$ (nuspalvinkite liežuvį pilkai);
5) $y = 2x^2 - 10$, kai $-1{,}8 \leqslant x \leqslant 0$;
6) $y = 2(x+2)^2 - 10$, kai $-4 \leqslant x \leqslant -1$;
7) $y = -2$, kai $-9 \leqslant x \leqslant -5$, $-2 \leqslant x \leqslant 0$;



8) $y = x$, kai $-2 \leqslant x \leqslant 0$;
9) $y = -x - 4$, kai $-2 \leqslant x \leqslant 0$;
10) $y = -x - 7$, kai $-7 \leqslant x \leqslant -5$;
11) $y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$, kai $-8 \leqslant x \leqslant -5$.

IV koordinatiniame ketvirtyje:

1) $y = -\frac{1}{2}(x-4{,}5)^2$, kai $0 \leqslant x \leqslant 9$;
2) $y = -\frac{1}{2}(x+2{,}5)^2 + 1$, kai $4 \leqslant x \leqslant 7{,}4$;
3) $y = 2(x-9)^2 - 10$, kai $9 \leqslant x \leqslant 11$;
4) $x = 11$, kai $-3 \leqslant y \leqslant 0$;
5) $y = 2(x-7{,}4)^2 - 10$, kai $7{,}4 \leqslant x \leqslant 8{,}5$;
6) $y = -2$, kai $0 \leqslant x \leqslant 1$.

11 paveikslas. Kūrybinio mąstymo su grafikais pavyzdžiai.

2020 metais matematikos egzaminą išlaikė tik 67,61% Lietuvos kandidatų (palyginti su 2019 m. – 82,09% kandidatų). Tai rodo, kad labai svarbu pritaikyti aktyvesnį mokymosi metodą, siekiant geriau suprasti matematiką, nes neišlaikė vidurinės mokyklos mokiniai. Pabrėžiama, kad matematikos pamokose jiems nesisekė matematikoje, ir nemano, kad vėliau jiems reikės daug matematikos. Be to, matematikos mokytojai turėtų turėti sistemingesnį požiūrį į aktyvų matematikos mokymą, kad padėtų mokiniams suprasti matematikos svarbą jų gyvenime ir lavinti matematikos problemų sprendimo kompetencijas..

3.4. Ispanijos filosofija

Ispanijos mokyklos, tiek privačios, tiek valstybinės, paprastai turi panašų mokymo modelį, kuriame aktyvus mokymasis neturi vietos. Po išsamių paieškų mokyklų, kurios moko taikant aktyvų požiūrį, beveik neradome institucijų, kurios tai naudoja savo mokymo procese. Šia prasme metodas, labiausiai panašus į aktyvųjį mokymąsi, yra Montessori metodas, kuris vis dažniau naudojamas Ispanijoje.

Daugelyje institutų ir mokyklų įvyko pedagogikos pokyčių, nes vis dažniau randama alternatyvių mokyklų, kuriose mokymas ir mokymasis apie emocijas bei kitų intelektinių savybių ugdymas yra labiau orientuotas į asmenį, išplečiamas dėmesys už teorinių žinių, kurios visada egzistavo pasaulyje. Tokiu būdu ir atsižvelgiant į tai, kad Ispanijos mokyklose nenaudojamas aktyvus požiūris, didėja atvirumas pedagogikoje, EnLeMaH projektas yra prasmingas Ispanijoje. Jame yra vieta mokytojams, kurie nuolat bando rasti naujus būdus pažvelgti į mokinius ir prie jų prieiti, todėl šis projektas suteiks jiems naujų, kitose šalyse pasitvirtinusių ir sėkmingų įrankių..

- Kai kurios Ispanijos mokyklos ir institutai pradeda diegti projektinio mokymosi naujoves, kuriose vis labiau vertinamos skersinės kompetencijos, taip pat mokymosi turinio kūrimas ir darbas grupėse. Kai kurios iš svarbiausių Ispanijos mokyklų ir institutų dėl savo naujovių yra:
- Escuela Ideo, Madridas: jie dirba pagal projektinio mokymosi modelį. Grupinis darbas, skirtas mokymuisi ir mokymasis, yra du jų pagrindai.
- Fundación Myland, Sevilija: ši mokykla šiuo metu stato pastatą, kuriame bus vidurinė mokykla. Jų pedagogika remiasi patyriminiu mokymusi, todėl mokiniams lengviau įgyti žinių mokantis ir veikiant.
- Colegio San Gregorio, Plasencia: subsidijuojamas švietimo centras, kuriame mokosi nuo 0 iki 18 metų amžiaus. Jo dėstytojų tikslas – struktūrizuoti mokymąsi pasitelkiant projektus ir aktyvias metodikas. Skatinamas emocinis ugdymas, o pradiniame ugdyme naudojama Heroes Tic metodika, kuri daro mokinius savo mokymosi patirties veikėjais. Svarbiausia yra tai, kad naudojamos kooperatyvinės grupės, o mokinų pažanga fiksuojama skaitmeniniuose mokinių dienoraščiuose.
- Colegio Amara Berri: Centro ugdymo metodikoje yra su amžiumi susijusių ciklo programų, o ypatingas dėmesys skiriamas kaip mokiniams organizuoti savo mąstymą ir jo ugdymo metodus, taip pat ugdyti mokinių savigarbą ir skatinti komandinį darbą. Svarbų vaidmenį atlieka ir žaidybinimas bei praktinis teorinių žinių pritaikymas.

Ispanijoje yra daug Montessori mokyklų, tačiau paprastai mokoma iki 12 metų, taigi, nors metodas yra labai panašus į aktyvųjį mokymąsi, amžiaus intervalas nėra tas pats.

Apibendrinant galima teigti, kad EnLeMaH projektas turės labai reikšmingą ir būtiną poveikį Ispanijos pedagogikai, nes mokytojams bus suteikta daug įrankių ir patarimų, kaip pritaikyti turinį prie savo mokinių mokymosi poreikių, todėl jų mokymas bus daug prasmingesnis buvo iki šiol.

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

3.5. Išvada

Kaip minėta įvairiose šalies filosofijose, galima pastebėti skirtumų, kaip grindžiamas aktyvus mokymasis mokykloje. Skirtumai gali būti labiau susiję su aktyvaus mokymosi įgyvendinimu, o ne su tuo, kaip pabrėžiama aktyvaus mokymosi mokykloje būtinybė. Visose šalyse mokytojų integravimo į šią filosofiją procesas yra svarbus aktyvaus mokymosi mokykloje ugdymo klausimas. Šioje srityje EnLeMaH projektas yra kiekvienos šalies strategijos ir filosofijos dalis.

4. EnLeMaH ir aktyvaus darbo kriterijai.

- Remiantis 1 ir 3 skyriais, šie EnLeMaH projekto aktyvaus mokymosi kriterijai bus pagrindas kuriant aktyvaus mokymosi situacijas. Tokiu būdu aktyvaus vaizdavimo režimo aspektai, eksperimentinis požiūris ir aktyvaus mokymosi filosofija bus sujungti į šiuos kriterijus:

  ● Realus objektas: mokymosi aplinkose turi būti tikrų objektų. (Kompiuteriu vykdoma veikla (pvz., GeoGebra) nelaikoma aktyvia veikla).
  ● Veikla: veiksmas yra aktyvus procesas. Besimokantieji turėtų būti ne pasyvūs gavėjai, o aktyviai dalyvauti mokymosi procese (pvz., stebėti eksperimentą, bet patys jo neatlikti). (Besimokantys turi būti įtraukti į veiklą.) Mokiniai turi būti aktyvūs kiekviename veiklos žingsnyje.
  ● Pamoka: aktyvi veikla gali būti kiekvieno pamokos elemento dalis (pvz., įvadas, naujo turinio mokymasis, automatizavimas, užbaigimas...)
  ● Medžiaga: apčiuopiami dalykai turi būti prieinami mokiniams namuose (arba klasėje).
  ● Aktyvių veiklų nustatymas namuose: sinchroninis (gyvai) ir asinchroninis (savarankiškas mokymasis be tiesioginio pristatymo). Aktyvaus mokymosi namuose nustatymas, be apčiuopiamos medžiagos, suteikia galimybę mokytojams kurti įvairias nuotolinio mokymosi aplinkas.

5. „EnLeMaH“ šablonas

Šis šablonas turėtų būti sukurto aktyvaus darbo dokumentacijos pagrindas. Taip bus atsižvelgta į praktinio mokymo aspektus ir lengvą šios veiklos panaudojimą mokytojams iš kitų šalių arba už EnLeMaH projekto ribų. Dokumentacija leidžia mokytojams suprasti ir pritaikyti veiklą savo klasėse.

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

7 Lentelė: EnleMaH šablonas

Veiklos pavadinimas
Santrauka (gimtoji kalba)
Santrauka (anglų kalba)
Užduoties tikslas (įvadas, pratimas, kartojimas...)
Mokymosi rezultatai
Mokinių išankstinės žinios
Medžiagos sąrašas
Numatomas veiklos laikas
Expected time for the preparation
Trumpas veiklos aprašymas (aprašymą reikia suskirstyti į kelias dalis, pagal užduotis. Reikia numatyti kiekvienos užduoties trukmę)

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

Pratybos mokiniams (tai turi būti surašyta atskirame dokumente)
Sprendimo planas (jis turi būti parašytas atskirame dokumente)
Pastabos (užuominos, sunkumai, klasės valdymas, diferenciacija, galimybės išplėsti veiklą)

Nuorodos

Brown, L. (2015). Researching as an enactivist mathematics education researcher. *ZDM Mathematics Education, 47*, 185–196.

Bruner, J. S. (1966). Toward a theory of instruction. Cambridge, Mass.: Belkapp Press.

Coles, A., & Brown, L. (2013) Making distinctions in task design and student activity. In C. Margolinas (Ed.) *Task design in Mathematics Education. Proceedings of ICMI Study 22* (pp. 183–192). https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834054

Di Paolo, E. (2018)."Enactivismo". *En Diccionario Interdisciplinar Austral, editado por Claudia E. Vanney, Ignacio Silva y Juan F. Franck.* URL=http://dia.austral.edu.ar/Enactivismo

Francis, Krista & Khan, Steven & Davis, Brent. (2016). Enactivism, Spatial Reasoning and Coding. Digital Experiences in Mathematics Education. 2. 10.1007/s40751-015-0010-4.

Maturana, H., & Varela, F. (1992). *The Tree of Knowledge: The biological roots of human understanding.* Boston MA: Shambhala. (First edition published 1987).

Maturana, H. (1987), "Everything is Said by an Observer", en W. I. Thompson (ed.), GAIA, A Way of Knowing: Political Implications of the New Biology, Hudson, N.Y., Lindisfarne Press, pp. 65-82.

Lozano, María Dolores (2014). La perspectiva enactivista en educación matemática: todo hacer es conocer. *Educación Matemática*, 162-182. [Fecha de consulta 11 de Octubre de 2021]. ISSN: 0187-8298. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40540854009

Reid, D. (1996). Enactivism as a methodology. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the twentieth annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 203–210). Valencia: PME.

Šis projektas finansuojamas remiant Europos Komisijai. Šis leidinys (komunikatas) atspindi tik autoriaus požiūrį. ir Komisija negali būti laikoma atsakinga už bet kokį jame esančios informacijos naudojimą

Schunk, D. (2012). *Learning theories.* An educational perspective. Boston, Mass: Pearson.

Varela, F., Thompson, E., & Rosch, E. (1991). *The embodied mind: cognitive science and human experience.* Cambridge: MIT Press.