C Mathematische Grundlagen

C.1 Summen

Mit dem Summenzeichen $\sum$ werden Rechenanweisungen zum Addieren kompakt geschrieben. Sie lassen sich oft mit Hilfe der Summenregeln vereinfachen.

Gibt es insgesamt n Werte in einer Zahlenreihe für Variable X, so schreibt man x_l für $l = 1, \ldots, n$ und

$$\sum_{l=1}^{l=n} x_l$$

bedeutet dann: „Summiere die x_l-Werte für $l = 1$ bis $l = n$". Noch kompakter schreibt man für „Summiere alle Werte von x"

$$\sum_l x_l \quad \text{oder} \quad \sum x_l$$

Rechenbeispiele: Summen bilden $(n = 4)$

		l					
		1	2	3	4	Summe	Schreibweise mit $\sum$
	x_l	4	1	6	−2	9	$\sum x_l = 9$
	y_l	3	−2	0	−2	−1	$\sum y_l = -1$
a)	$x_l + y_l$	7	−1	6	−4	8	$\sum(x_l + y_l) = 8$
b)	$3y_l$	9	−6	0	−6	−3	$\sum(3y_l) = -3$
c)	$-2x_l$	−8	−2	−12	4	−18	$\sum(-2x_l) = -18$
d)	$x_l y_l$	12	−2	0	4	14	$\sum x_l y_l = 14$
e)	z_l^*	3	3	3	3	12	$\sum z_l = \sum 3 = 12$

*z_l ist eine Konstante, da sie für alle l denselben Wert hat.

Regeln für Summen

Für Werte x_l und y_l mit $l = 1, \ldots, n$ und einer Konstanten c gilt:

Regel 1: Die Summe von addierten x_l- und y_l-Werten ist gleich der Summe der x_l-Werte addiert zur Summe der y_l-Werte.

$$\sum(x_l + y_l) = \sum x_l + \sum y_l$$

Regel 2: Die Summe der mit einer Konstanten c multiplizierten x_l-Werte ist gleich der Summe der x_l-Werte multipliziert mit c.

$$\sum cx_l = c \sum x_l$$

Regel 3: Die Summe von n Werten einer Konstante c ist gleich der Anzahl n multipliziert mit der Konstanten c.

$$\sum c = nc$$

Für n=4 erhält man ausführlich geschrieben:

für Regel 1) $(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) + (x_4 + y_4)$
$= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$

für Regel 2) $cx_1 + cx_2 + cx_3 + cx_4 = c(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$

für Regel 3) $c + c + c + c = 4c$

Summen mit Summationsgrenzen

Sollen nicht alle Werte aufsummiert werden, so gibt man am Summenzeichen die Summationsgrenzen an. Zum Beispiel bedeutet $\sum_{l=2}^{4} x_l$ „summiere x_l für l=2 bis l=4“ und $\sum_{l \leq 3} x_l$ „summiere alle x-Werte deren Laufindex kleiner gleich 3 ist“.

Rechenbeispiele: Summen mit Summationsgrenzen (Werte aus der Tabelle S. 329)

$$\sum_{l=2}^{4} x_l = x_2 + x_3 + x_4 = 1 + 6 + (-2) = 5$$

$$\sum_{l=2}^{2} x_l = x_2 = 1$$

$$\sum_{l \leq 3} x_l = \sum_{l=1}^{3} x_l = x_1 + x_2 + x_3 = 4 + 1 + 6 = 11$$

Rechenbeispiele: Summenregeln anwenden

Beispiel 1: Für die folgende Werte und $c = 3$ wird sowohl $\sum x_l(y_l + c)$ als auch $\sum x_l y_l + c \sum x_l$ berechnet

l	1	2	3	4	Summen
x_l	4	1	6	-2	$\sum x_l = 9$
y_l	3	-2	0	-2	
$y_l + c$	6	1	3	1	
$x_l(y_l + c)$	24	1	18	-2	$\sum x_l(y_l + c) = 41$
$x_l y_l$	12	-2	0	4	$\sum x_l y_l = 14;\quad 14 + 3 \times 9 = 41$

Beispiel 2: Für $n = 4$ sei $\sum x_l = 8$ und $\sum y_l = 10$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum(-y_l) &= (-1)\textstyle\sum y_l = -10 \\
\textstyle\sum(x_l - y_l) &= \textstyle\sum x_l - \sum y_l = -2 \\
\textstyle\sum(2 + 3y_l) &= \textstyle\sum 2 + \sum 3y_l = 4 \times 2 + 3 \sum y_l = 38 \\
\textstyle\sum(y_l - 2x_l + 5) &= \textstyle\sum y_l - 2\sum x_l + 4 \times 5 = 14
\end{aligned}$$

Beispiel 3: Vereinfachen

$$\frac{\sum(cx_l + x_l)}{\sum x_l} = \frac{\sum x_l(c+1)}{\sum x_l} = \frac{(c+1)\sum x_l}{\sum x_l} = c + 1$$

Beispiel 4: Vereinfachen

$$\frac{\sum(x_l - y_l)^2 + \sum 2x_l y_l}{\sum 3(x_l^2 + y_l^2)}$$

$$= \frac{\sum(x_l^2 - 2x_l y_l + y_l^2) + \sum 2x_l y_l}{\sum 3(x_l^2 + y_l^2)} \qquad \text{binomische Formel, Anhang C.3}$$

$$= \frac{\sum x_l^2 - 2\sum x_l y_l + \sum y_l^2 + 2\sum x_l y_l}{3\sum(x_l^2 + y_l^2)} \qquad \text{Regeln (1), (2)}$$

$$= \frac{\sum(x_l^2 + y_l^2)}{3\sum(x_l^2 + y_l^2)} = \frac{1}{3} \qquad \text{Regel (1) und } \textstyle\sum(x_l^2 + y_l^2)\text{, kürzen}$$

C.2

C.2 Doppelsummen

Summen mit variablen Summationsgrenzen

Mit Werten x_{ij} für $i = 1, \ldots I$ und $j = 1, \ldots n_I$ kennzeichnet man Werte x nach zwei Kriterien. So kann man zum Beispiel den Wert jeder Person j innerhalb Gruppe i zuordnen.

x_{ij}

	Person in Gruppe i					Summe	Personenanzahl
Gruppe i	j : 1	2	3	4	5	x_{i+}	n_i
1	1	3	5			9	3
2	2	4	5	8	6	25	5
3	2	4				6	2

In Symbolen schreibt man die obigen Werte x_{il} wie folgt:

x_{ij}

	j						
i	1	2	3	4	5	x_{i+}	n_i
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}			x_{1+}	n_1
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{2+}	n_2
3	x_{31}	x_{32}				x_{3+}	n_3

So bezeichnet dann $x_{32} = 4$ den Wert für die zweite Person in der dritten Gruppe.

Die Summe in der ersten Zeile, ausführlicher „die Summe der Werte x_{1j} für $j = 1, 2, 3$“ ist

$$x_{1+} = \sum_{j=1}^{n_1} x_{1j} = \sum_{j=1}^{3} x_{1j} = 1 + 3 + 5 = 9$$

Die Summe der i-ten Zeile schreibt man

$$x_{i+} = \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = \sum_j x_{ij}$$

Die Summe aller Werte kann man in einer der folgenden Weisen schreiben:

$$x_{++} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} = \sum_i \sum_j x_{ij} = \sum_{ij} x_{ij} = \sum x_{ij}$$

Summen mit festen Summationsgrenzen

Sind jeweils gleich viele Werte J in jeder Gruppe i, so schreibt man:

$$x_{ij} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, I \text{ und } j = 1, \ldots, J.$$

Es lassen sich dann nicht nur Summen in jeder Zeile i sondern zusätzlich die Summen in jeder Spalte j bilden.

x_{ij}

	j					Summe
i	1	2	3	4	5	x_{i+}
1	1	3	5	−2	3	10
2	2	4	5	8	6	25
3	2	4	−1	−3	5	7
Summe: x_{+j}	5	11	9	3	14	$x_{++} = 42$

Regeln für Doppelsummen

Für Werte x_{ij}, y_{ij} und z_i mit $i = 1, \ldots, I$, $j = 1, \ldots, J$ und eine Konstante c gilt

Regel 1: $\sum_{ij}(x_{ij} + y_{ij}) = \sum_{ij} x_{ij} + \sum_{ij} y_{ij}$
Regel 2: $\sum_{ij} z_i x_{ij} = \sum_i z_i \sum_j x_{ij}$
Regel 3: $\sum_{ij} c = IJc$

Rechenbeispiele: für $I = 2$ und $J = 3$
Beispiel für Regel 1

x_{ij}

	j			
i	1	2	3	x_{i+}
1	1	0	−2	−1
2	4	2	1	7
x_{+j}	5	2	−1	

y_{ij}

	j			
i	1	2	3	y_{i+}
1	2	2	1	5
2	−1	3	−4	−2
y_{+j}	1	5	−3	

$u_{ij} = x_{ij} + y_{ij}$

	j			
i	1	2	3	u_{i+}
1	3	2	−1	4
2	3	5	−3	5
u_{+j}	6	7	−4	

$$\begin{aligned}\sum x_{ij} &= \sum_i(\sum_j x_{ij}) = \sum_i x_{i+} = -1 + 7 = 6 \\ &= \sum_j(\sum_i x_{ij}) = \sum_j x_{+j} = 5 + 2 - 1 = 6\end{aligned}$$

$$\sum y_{ij} = 5 - 2 = 3$$

$$\sum x_{ij} + \sum y_{ij} = 9 \qquad \sum(x_{ij} + y_{ij}) = \sum u_{ij} = 9$$

Beispiel für Regel 2

x_{ij}

i	j = 1	2	3	x_{i+}
1	1	0	−2	−1
2	4	2	1	7
x_{+j}	5	2	−1	

z_i

i	j = 1	2	3	Jz_i
1	3	3	3	9
2	1	1	1	3
z_+	4	4	4	

$v_{ij} = z_i x_{ij}$

i	j = 1	2	3	v_{i+}
1	3	0	−6	−3
2	4	2	1	7
v_{+j}	7	2	−5	

$$\sum_i z_i x_{ij} = \sum_i z_i \sum_j x_{ij} = \sum z_i x_{i+} = 3 \times (-1) + 1 \times 7 = 4$$

$$\sum_i z_i x_{ij} = \sum v_{ij} = 4$$

Beispiel für Regel 3

x_{ij}

i	j = 1	2	3	x_{i+}
1	1	0	−2	−1
2	4	2	1	7
x_{+j}	5	2	−1	

c

i	j = 1	2	3	Jc
1	2	2	2	6
2	2	2	2	6
Ic	4	4	4	

$w_{ij} = cx_{ij}$

i	j = 1	2	3	w_{i+}
1	2	0	−4	−2
2	8	4	2	14
w_{+j}	10	4	−2	

$$\sum c x_{ij} = c \sum x_{ij} = 2 \times 6 = 12$$

$$\sum c x_{ij} = \sum w_{ij} = 12$$

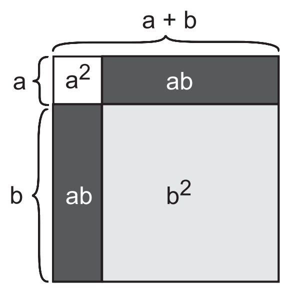
$$\sum_{ij} c = \sum_i (\sum_j c) = \sum_i Jc = IJc = 2 \times 3 \times 2 = 12$$

C.3 Binomische Formeln

Die Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

lässt sich geometrisch erklären. Die Fläche eines Quadrats mit Seitenlänge $(a+b)$ ist $(a+b)^2$. Sie setzt sich zusammen aus zwei Quadraten mit den Seitenlängen a und b, sowie zwei Rechtecken, beide mit Flächeninhalt ab



Alternativ rechnet man ausführlich

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a(a+b) + b(a+b)\\ &= a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

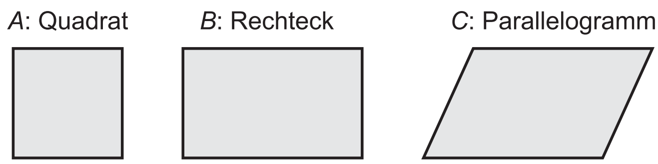
Auf ähnliche Weise ergeben sich die beiden anderen binomischen Formeln, die oft zum Vereinfachen von Berechnungen benutzt werden:

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2,\\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2.\end{aligned}$$

C.4 Notwendige und hinreichende Bedingungen

Notwendige, hinreichende und äquivalente Aussagen gehören in das Gebiet der Logik. Sie sind zum Beispiel wesentlich für mathematische Beweise. Es sind Aussagen A, B, $C \ldots$, für die jeweils eindeutig entschieden werden kann, ob sie zutreffen. Man sagt, B folgt aus A ($A \Rightarrow B$), oder B folgt nicht aus A ($A \nRightarrow B$).

Anhand der folgenden Vierecke kann man sich unterschiedliche Arten von Bedingungen verdeutlichen.



(1) Die Aussage, A: ein Viereck ist ein Quadrat, ist hinreichend, aber nicht notwendig für die Aussage B: ein Viereck ist ein Rechteck.

Hier folgt B aus A ($A \Rightarrow B$), da jedes Quadrat vier rechte Winkel hat, also auch ein Rechteck ist, aber A folgt nicht aus B ($A \nLeftarrow B$), da in einem Rechteck nicht alle vier Seiten gleich lang sein müssen. Da $A \Rightarrow B$ und $A \nLeftarrow B$ gilt, sagt man ***A* ist hinreichend, aber nicht notwendig für *B***.

(2) Die Aussage, C: ein Viereck ist ein Parallelogramm, ist notwendig, aber nicht hinreichend für die Aussage B: ein Viereck ist ein Rechteck.

Hier folgt C aus B ($B \Rightarrow C$), da jedes Rechteck jeweils zwei gegenüberliegende Seite hat, die parallel verlaufen, also auch ein Parallelogramm ist, aber aus C folgt nicht B ($B \nLeftarrow C$), da ein Parallelogramm keine rechten Winkel haben muss. Da $B \Rightarrow C$ und $B \nLeftarrow C$ gilt, sagt man ***C* ist notwendig aber nicht hinreichend für *B***.

(3) Die Aussage, D: ein Parallelogramm hat rechte Winkel und die Aussage, B: ein Viereck ist ein Rechteck, sind äquivalent ($B \Leftrightarrow D$).

Hier folgt B aus D, da ein Parallelogramm mit rechten Winkeln ein Rechteck ist und D folgt aus B, da jedes Rechteck auch ein Parallelogramm ist. Da sowohl $B \Rightarrow D$ als auch $B \Leftarrow D$ gilt, sagt man, die Aussagen ***B* und *D* sind äquivalent (*B* ⇔ *D*)**.

D

Anhang

Statistische Ergebnisse

D

D Statistische Ergebnisse